インサイト・ファクトリー 社内セミナー

2020年4月

マーケティング・ミックス・モデリング

VII. 状態空間モデルの基礎

小野 滋

INSIGHT FACTORY

2020/04/07

スケジュール

統計学・データ解析	マーケティング・ミックス・モデリングへの適用
I. イントロダクション	
	II. 市場反応モデルとは
III. 回帰分析の基礎	
	IV. 静学的市場反応モデル
V. 時系列分析の基礎	
	VI. 動学的市場反応モデル(1)
VII. 状態空間モデルの基礎	
	VIII. 動学的市場反応モデル(2)

目次

この章の内容

状態空間モデルの基礎について学びます

本資料作成に用いたすべてのRコードを、以下で公開しています:
https://rpubs.com/shig_ono/MMM_7

1. 時系列モデルの状態空間表現

1. 時系列モデルの状態空間表現 (CK p.77-78)

このセミナーで扱う時系列モデルは、すべて以下の一般的な形式で表現できる：

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

観測方程式

分散H_tのホワイトノイズ

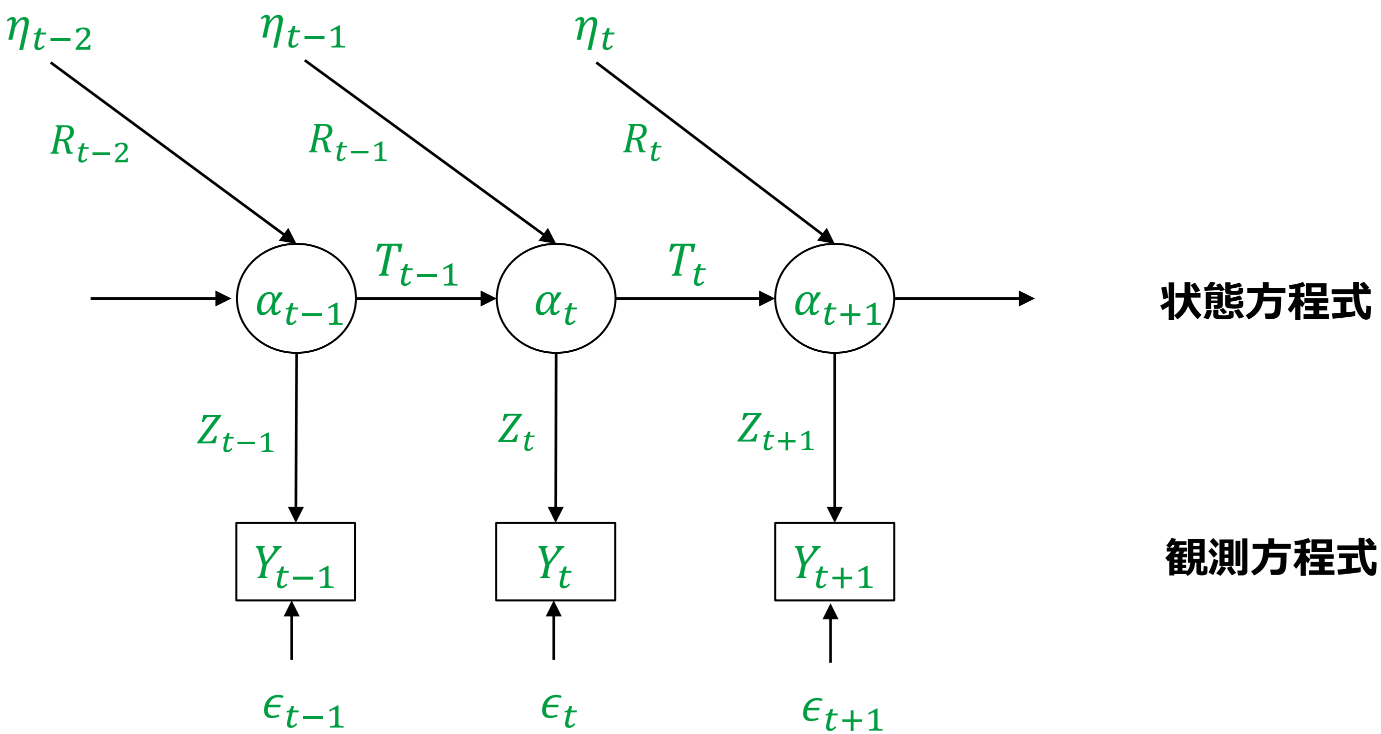
$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

状態方程式

分散Q_tのホワイトノイズ

これを時系列の**状態空間表現**という。

表現における記号はKFASパッケージに準拠する(Helske, 2017)


η_{t-2}
η_{t-1}
η_t
R_{t-2}
R_{t-1}
R_t
T_{t-1}
T_t
α_{t-1}
α_t
α_{t+1}
Z_{t-1}
Z_t
Z_{t+1}
Y_{t-1}
Y_t
Y_{t+1}
ϵ_{t-1}
ϵ_t
ϵ_{t+1}
状態方程式
観測方程式

状態空間モデルについて学ぶ際のポイント：

- 次の２つを区別して下さい！
  - 時系列モデルを状態空間表現によって**表現**すること
  - そのモデルを**推定**すること

状態空間表現に慣れるために、さまざまな時系列モデルを状態空間表現に書き換えてみよう

- どうやって推定するのかは、あとで考える

以下でとりあげるモデル：

1. ローカル・レベル・モデル (確定的レベル)
2. ローカル・レベル・モデル (確率的レベル)
3. ローカル線形トレンド・モデル (確定的レベルと確定的傾き)
4. ローカル線形トレンド・モデル (確率的レベルと確定的傾き)
5. ローカル線形トレンド・モデル (確率的レベルと確率的傾き)
6. 季節要素のあるローカル・レベル・モデル (確定的レベルと確定的季節)
7. 季節要素のあるローカル・レベル・モデル (確率的レベルと確定的季節)
8. 季節要素のあるローカル・レベル・モデル (確率的レベルと確率的季節)
9. ARIMA(1,1,1)モデル
10. 説明変数のあるローカル・レベル・モデル (確定的レベルと確定的係数)
11. 説明変数のあるローカル・レベル・モデル (確率的レベルと確定的係数)
12. 説明変数のあるローカル・レベル・モデル (確率的レベルと確率的係数)

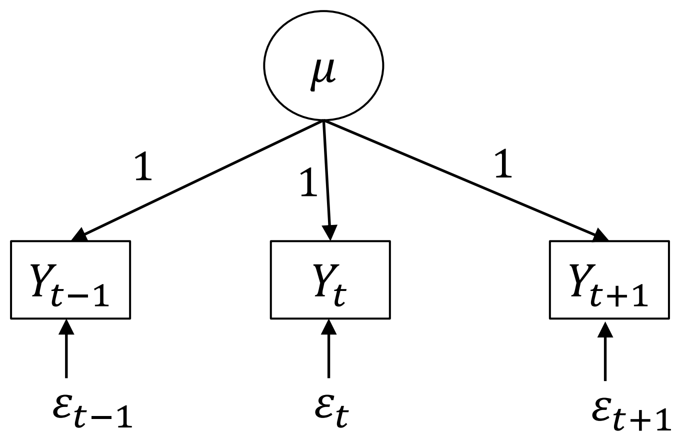
1-1. ローカル・レベル・モデル (確定的レベル) (CK p.9-10)

$$\boxed{Y_t = \mu + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)}$$

状態空間表現では

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$
$$Y_t = 1\mu + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$
$$\mu = 1\mu$$



$$\boxed{\begin{aligned} Y_t &= \mu_t + \varepsilon_t, & \varepsilon_t &\sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2) \\ \mu_{t+1} &= \mu_t + \xi_t, & \xi_t &\sim WN(0, \sigma_\xi^2) \end{aligned}}$$

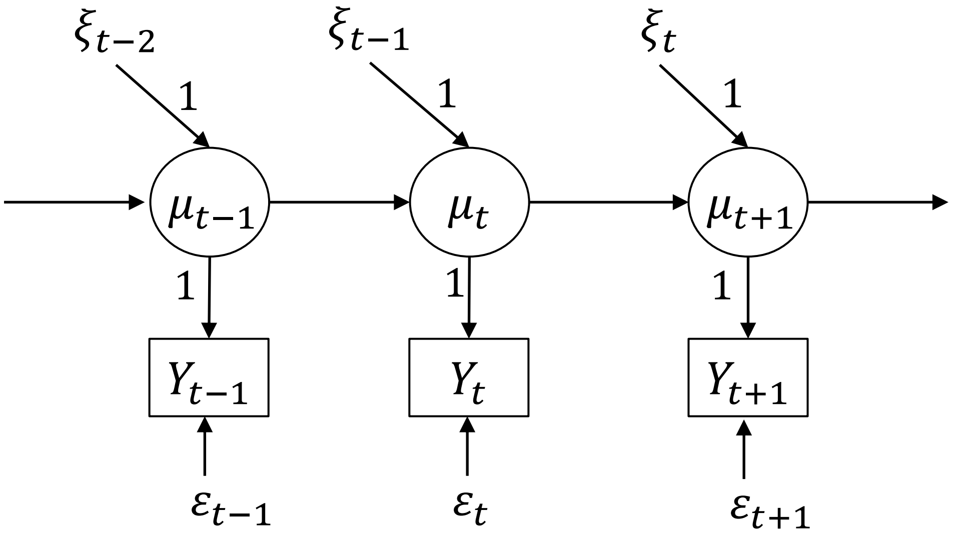
追加

ランダム・ウォーク
＋ホワイトノイズ

状態空間表現では

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$
$$Y_t = 1\mu_t + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$
$$\mu_{t+1} = 1\mu_t + 1\xi_t, \qquad \xi_t \sim WN(0, \sigma_\xi^2)$$



ところで、差分時系列について考えると…

$$Y_t - Y_{t-1} = (\mu_t + \varepsilon_t) - (\mu_{t-1} + \varepsilon_{t-1})$$

$\mu_t - \mu_{t-1} = \xi_{t-1}$を代入すると

$$\underbrace{Y_t - Y_{t-1}}_{\text{差分}} = \underbrace{\xi_{t-1}}_{\text{ホワイトノイズ}} + \underbrace{\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}}_{\text{MA(1)撹乱項}}$$

このコレログラムはMA(1) と同じである。

実は、ローカル・レベル・モデルは ARIMA(0,1,1) と同じモデルである。
(CK pp.140-141)

$$\boxed{\begin{aligned} Y_t &= \mu_t + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2) \\ \mu_{t+1} &= \mu_t + v \end{aligned}}$$

時点を説明変数にした単回帰モデル

変形すると

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu_t + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2) \\ \mu_{t+1} &= \mu_t + v_t \\ v_{t+1} &= v_t \end{aligned}$$

状態空間表現では

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

$$Y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_t \\ v_t \end{bmatrix} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{t+1} \\ v_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_t \\ v_t \end{bmatrix}$$

INSIGHT FACTORY

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu_t + \varepsilon_t, & \varepsilon_t &\sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2) \\ \mu_{t+1} &= \mu_t + v_1 + \xi_t, & \xi_t &\sim WN(0, \sigma_\xi^2) \end{aligned}$$

ドリフトつき
ランダム・ウォーク
＋ホワイトノイズ

追加

変形すると

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu_t + \varepsilon_t, & \varepsilon_t &\sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2) \\ \mu_{t+1} &= \mu_t + v_t + \xi_t, & \xi_t &\sim WN(0, \sigma_\xi^2) \\ v_{t+1} &= v_t \end{aligned}$$

状態空間表現では

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

$$Y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_t \\ v_t \end{bmatrix} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{t+1} \\ v_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_t \\ v_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_t \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \xi_t \sim WN(0, \sigma_\xi^2)$$

INSIGHT FACTORY

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \mu_t + \varepsilon_t, & \varepsilon_t &\sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2) \\
\mu_{t+1} &= \mu_t + v_t + \xi_t, & \xi_t &\sim WN(0, \sigma_\xi^2) \\
v_{t+1} &= v_t + \zeta_t, & \zeta_t &\sim WN(0, \sigma_\zeta^2)
\end{aligned}
$$

追加

状態空間表現では

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

$$Y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_t \\ v_t \end{bmatrix} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{t+1} \\ v_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_t \\ v_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_t \\ \zeta_t \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \xi_t \\ \zeta_t \end{bmatrix} \sim WN\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_\xi^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\zeta^2 \end{bmatrix} \right)$$

INSIGHT FACTORY

季節効果を
表現している

$$Y_t = \mu_1 + \gamma_{1,t} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$ 式(1)

$$\gamma_{1,t+1} = -(\gamma_{1,t} + \gamma_{2,t} + \cdots + \gamma_{11,t})$$ 式(2)

$$\gamma_{2,t+1} = \gamma_{1,t}$$ 式(3)

$$\gamma_{3,t+1} = \gamma_{2,t}$$ 式(4)

$$\gamma_{4,t+1} = \gamma_{3,t}$$ 式(5)

$$\gamma_{5,t+1} = \gamma_{4,t}$$ 式(6)

$$\gamma_{6,t+1} = \gamma_{5,t}$$ 式(7)

$$\gamma_{7,t+1} = \gamma_{6,t}$$ 式(8)

$$\gamma_{8,t+1} = \gamma_{7,t}$$ 式(9)

$$\gamma_{9,t+1} = \gamma_{8,t}$$ 式(10)

$$\gamma_{10,t+1} = \gamma_{9,t}$$ 式(11)

$$\gamma_{11,t+1} = \gamma_{10,t}$$ 式(12)

変数$\gamma_{1,t}$は季節効果の表現になっているのか？ 確認してみよう。

- $\gamma_{1,t}$ の$t = 1, \ldots, 12$における値をそれぞれS1, ..., S12と書こう

	t=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\gamma_{1,t}$	**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**	**S9**	**S10**	**S11**	**S12**			
$\gamma_{2,t}$															
$\gamma_{3,t}$															
$\gamma_{4,t}$															
$\gamma_{5,t}$															
$\gamma_{6,t}$															
$\gamma_{7,t}$															
$\gamma_{8,t}$															
$\gamma_{9,t}$															
$\gamma_{10,t}$															
$\gamma_{11,t}$															

- 式(3)-(12)より、11個の変数は下図の値を持つ
  - ところで、式(2) より、$S12 = -(S1 + \cdots + S11)$である
  - すなわち、$(S1 + \cdots + S12) = 0$である

カコミ部分の和は0

	t=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\gamma_{1,t}$	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12			
$\gamma_{2,t}$		**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**	**S9**	**S10**	**S11**	**S12**		
$\gamma_{3,t}$			**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**	**S9**	**S10**	**S11**	**S12**	
$\gamma_{4,t}$				**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**	**S9**	**S10**	**S11**	**S12**
$\gamma_{5,t}$					**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**	**S9**	**S10**	**S11**
$\gamma_{6,t}$						**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**	**S9**	**S10**
$\gamma_{7,t}$							**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**	**S9**
$\gamma_{8,t}$								**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**
$\gamma_{9,t}$									**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**
$\gamma_{10,t}$										**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**
$\gamma_{11,t}$											**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**

- 従って、$\gamma_{1,13} = -(\gamma_{1,12} + \gamma_{2,12} + \cdots + \gamma_{11,12}) = -(S2 + \cdots S11) = S1$である

カコミ部分の和は0

	t=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\gamma_{1,t}$	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	**S1**		
$\gamma_{2,t}$		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12		
$\gamma_{3,t}$			S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	
$\gamma_{4,t}$				S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12
$\gamma_{5,t}$					S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11
$\gamma_{6,t}$						S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10
$\gamma_{7,t}$							S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
$\gamma_{8,t}$								S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8
$\gamma_{9,t}$									S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
$\gamma_{10,t}$										S1	S2	S3	S4	S5	S6
$\gamma_{11,t}$											S1	S2	S3	S4	S5

- 11個の変数は下図の値を持つ
  - $\gamma_{1,t}$ の$t = 13$以降の値は、S1, …, S12の繰り返しとなる
- このように、**変数 $\gamma_{1,t}$ は季節効果を表現している**
  - 変数 $\gamma_{2,t}, \ldots, \gamma_{11,t}$ は、$\gamma_{1,t}$ に季節効果を表現させるための道具に過ぎない

	t=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\gamma_{1,t}$	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	**S1**	**S2**	**S3**
$\gamma_{2,t}$	S12	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S1	S2
$\gamma_{3,t}$	S11	S12	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S1
$\gamma_{4,t}$	S10	S11	S12	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12
$\gamma_{5,t}$	S9	S10	S11	S12	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11
$\gamma_{6,t}$	S8	S9	S10	S11	S12	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10
$\gamma_{7,t}$	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
$\gamma_{8,t}$	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8
$\gamma_{9,t}$	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
$\gamma_{10,t}$	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S1	S2	S3	S4	S5	S6
$\gamma_{11,t}$	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S1	S2	S3	S4	S5

状態空間表現では…

観察方程式は

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

$$Y_t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mu_t \\ \gamma_{1,t} \\ \gamma_{2,t} \\ \gamma_{3,t} \\ \gamma_{4,t} \\ \gamma_{5,t} \\ \gamma_{6,t} \\ \gamma_{7,t} \\ \gamma_{8,t} \\ \gamma_{9,t} \\ \gamma_{10,t} \\ \gamma_{11,t} \end{bmatrix} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

状態方程式は

$$\alpha_{t+1} = T_t\alpha_t + R_t\eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{t+1} \\ \gamma_{1,t+1} \\ \gamma_{2,t+1} \\ \gamma_{3,t+1} \\ \gamma_{4,t+1} \\ \gamma_{5,t+1} \\ \gamma_{6,t+1} \\ \gamma_{7,t+1} \\ \gamma_{8,t+1} \\ \gamma_{9,t+1} \\ \gamma_{10,t+1} \\ \gamma_{11,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_t \\ \gamma_{1,t} \\ \gamma_{2,t} \\ \gamma_{3,t} \\ \gamma_{4,t} \\ \gamma_{5,t} \\ \gamma_{6,t} \\ \gamma_{7,t} \\ \gamma_{8,t} \\ \gamma_{9,t} \\ \gamma_{10,t} \\ \gamma_{11,t} \end{bmatrix}$$

$$Y_t = \mu_1 + \gamma_{1,t} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\mu_{t+1} = \mu_t + \xi_t, \qquad \xi_t \sim WN(0, \sigma_\xi^2)$$

追加

$$\gamma_{1,t+1} = -(\gamma_{1,t} + \gamma_{2,t} + \cdots + \gamma_{11,t})$$

$$\gamma_{2,t+1} = \gamma_{1,t}$$

$$\gamma_{3,t+1} = \gamma_{2,t}$$

$$\gamma_{4,t+1} = \gamma_{3,t}$$

$$\gamma_{5,t+1} = \gamma_{4,t}$$

$$\gamma_{6,t+1} = \gamma_{5,t}$$

$$\gamma_{7,t+1} = \gamma_{6,t}$$

$$\gamma_{8,t+1} = \gamma_{7,t}$$

$$\gamma_{9,t+1} = \gamma_{8,t}$$

$$\gamma_{10,t+1} = \gamma_{9,t}$$

$$\gamma_{11,t+1} = \gamma_{10,t}$$

状態空間表現では…

観察方程式は

$$Y_t = Z_t\alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

$$Y_t = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}' \begin{bmatrix}\mu_t\\ \gamma_{1,t}\\ \gamma_{2,t}\\ \gamma_{3,t}\\ \gamma_{4,t}\\ \gamma_{5,t}\\ \gamma_{6,t}\\ \gamma_{7,t}\\ \gamma_{8,t}\\ \gamma_{9,t}\\ \gamma_{10,t}\\ \gamma_{11,t}\end{bmatrix} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

1-6. と同じ

状態方程式は

$$\alpha_{t+1} = T_t\alpha_t + R_t\eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{t+1} \\ \gamma_{1,t+1} \\ \gamma_{2,t+1} \\ \gamma_{3,t+1} \\ \gamma_{4,t+1} \\ \gamma_{5,t+1} \\ \gamma_{6,t+1} \\ \gamma_{7,t+1} \\ \gamma_{8,t+1} \\ \gamma_{9,t+1} \\ \gamma_{10,t+1} \\ \gamma_{11,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_t \\ \gamma_{1,t} \\ \gamma_{2,t} \\ \gamma_{3,t} \\ \gamma_{4,t} \\ \gamma_{5,t} \\ \gamma_{6,t} \\ \gamma_{7,t} \\ \gamma_{8,t} \\ \gamma_{9,t} \\ \gamma_{10,t} \\ \gamma_{11,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xi_t$$

$$\xi_t \sim WN(0, \sigma_\xi^2)$$

1-8. 季節要素のあるローカル・レベル・モデル(確率的レベルと確率的季節) (CK p.44)

INSIGHT FACTORY

$$Y_t = \mu_1 + \gamma_{1,t} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\mu_{t+1} = \mu_t + \xi_t, \qquad \xi_t \sim WN(0, \sigma_\xi^2)$$

$$\gamma_{1,t+1} = -(\gamma_{1,t} + \gamma_{2,t} + \cdots + \gamma_{11,t}) + \omega_t, \qquad \omega_t \sim WN(0, \sigma_\omega^2)$$

追加

$$\gamma_{2,t+1} = \gamma_{1,t}$$

$$\gamma_{3,t+1} = \gamma_{2,t}$$

$$\gamma_{4,t+1} = \gamma_{3,t}$$

$$\gamma_{5,t+1} = \gamma_{4,t}$$

$$\gamma_{6,t+1} = \gamma_{5,t}$$

$$\gamma_{7,t+1} = \gamma_{6,t}$$

$$\gamma_{8,t+1} = \gamma_{7,t}$$

$$\gamma_{9,t+1} = \gamma_{8,t}$$

$$\gamma_{10,t+1} = \gamma_{9,t}$$

$$\gamma_{11,t+1} = \gamma_{10,t}$$

状態空間表現では…

観察方程式は

$$Y_t = Z_t\alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

$$Y_t = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}' \begin{bmatrix}\mu_t\\ \gamma_{1,t}\\ \gamma_{2,t}\\ \gamma_{3,t}\\ \gamma_{4,t}\\ \gamma_{5,t}\\ \gamma_{6,t}\\ \gamma_{7,t}\\ \gamma_{8,t}\\ \gamma_{9,t}\\ \gamma_{10,t}\\ \gamma_{11,t}\end{bmatrix} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

1-6. と同じ

状態方程式は

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{t+1} \\ \gamma_{1,t+1} \\ \gamma_{2,t+1} \\ \gamma_{3,t+1} \\ \gamma_{4,t+1} \\ \gamma_{5,t+1} \\ \gamma_{6,t+1} \\ \gamma_{7,t+1} \\ \gamma_{8,t+1} \\ \gamma_{9,t+1} \\ \gamma_{10,t+1} \\ \gamma_{11,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_t \\ \gamma_{1,t} \\ \gamma_{2,t} \\ \gamma_{3,t} \\ \gamma_{4,t} \\ \gamma_{5,t} \\ \gamma_{6,t} \\ \gamma_{7,t} \\ \gamma_{8,t} \\ \gamma_{9,t} \\ \gamma_{10,t} \\ \gamma_{11,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_t \\ \omega_t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \xi_t \\ \omega_t \end{bmatrix} \sim WN\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_\xi^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\omega^2 \end{bmatrix} \right)$$

１階差分系列を

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

と表記して、

$$\boxed{\Delta Y_t = \phi \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1}}$$

変形すると

$$Y_t = Y_{t-1} + \Delta Y_t$$

$$\Delta Y_{t+1} = \phi \Delta Y_t + \varepsilon_{t+1} + \phi \varepsilon_t$$

状態空間表現では… (Helske, 2017)

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

$$Y_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ Y_t - Y_{t-1} \\ \theta \varepsilon_t \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

$$\begin{bmatrix} Y_t \\ Y_{t+1} - Y_t \\ \theta \varepsilon_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \phi & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ Y_t - Y_{t-1} \\ \theta \varepsilon_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \theta \end{bmatrix} \varepsilon_{t+1}, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

注意！3つめの状態変数は時間的な構造を持っていない

$$\boxed{Y_t = \mu + \beta X_t + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)}$$

単回帰モデル

状態空間表現

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$
$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

において、説明変数はZ_tないしT_tで表現できる。

Z_tで表現してみよう。

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$
$$Y_t = \begin{bmatrix} X_t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \mu \end{bmatrix} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$
$$\begin{bmatrix} \beta \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \mu \end{bmatrix}$$

注意！ 回帰モデルにおける回帰係数を「状態」、説明変数を「パラメータ」として表現している

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu_t + \beta X_t + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2) \\ \mu_{t+1} &= \mu_t + \xi_t, \qquad \xi_t \sim WN(0, \sigma_\xi^2) \end{aligned}$$

状態空間表現では

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

$$Y_t = \begin{bmatrix} X_t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \mu_t \end{bmatrix} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \mu_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \mu_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_t \end{bmatrix}, \qquad \xi_t \sim WN(0, \sigma_\xi^2)$$

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \mu_t + \beta_t X_t + \varepsilon_t, & \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2) \\
\mu_{t+1} &= \mu_t + \xi_t, & \xi_t \sim WN(0, \sigma_\xi^2) \\
\beta_{t+1} &= \beta_t + \tau_t, & \tau_t \sim WN(0, \sigma_\tau^2)
\end{aligned}
$$

状態空間表現では

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

$$Y_t = \begin{bmatrix} X_t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_t \\ \mu_t \end{bmatrix} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{t+1} \\ \mu_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_t \\ \mu_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \tau_t \\ \xi_t \end{bmatrix} \sim WN\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_\tau^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\xi^2 \end{bmatrix} \right)$$

まとめ：時系列の状態空間表現

シグナル

$$y_t = \underline{Z_t \alpha_t} + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

観測方程式

デザイン・ベクトル **状態ベクトル** **観察撹乱項**

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

状態方程式

遷移行列

多くの場合、
単位行列

状態撹乱項

2. 状態空間モデルの推定

2. 状態空間モデルの推定

- 一般に、状態空間表現によって表現したモデルを**状態空間モデル**と呼ぶ

- この節では、状態空間モデルの推定方法について考える

■ 主な推定方法

- **カルマンフィルタ**
  - 前提
    - 観察方程式と状態方程式が線形であること
    - **撹乱項は正規分布に従うこと**
  - 高速
  - オンラインでの逐次的推定が得意

- 粒子フィルタ

- マルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC)

Rudolf Emil Kálmán
(1930-2016)

カルマンフィルタの
元となるアイデアは、
列車で移動中に
思いついたんだそうです
(足立, 2017)

このセミナーでは、カルマンフィルタについて紹介します

画像出典: https://ja.wikipedia.org/wiki/ルドルフ・カルマン

■ なにを推定するのか？

- 状態を推定する
- パラメータを推定する

$$y_t = Z_t \boxed{\alpha_t} + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

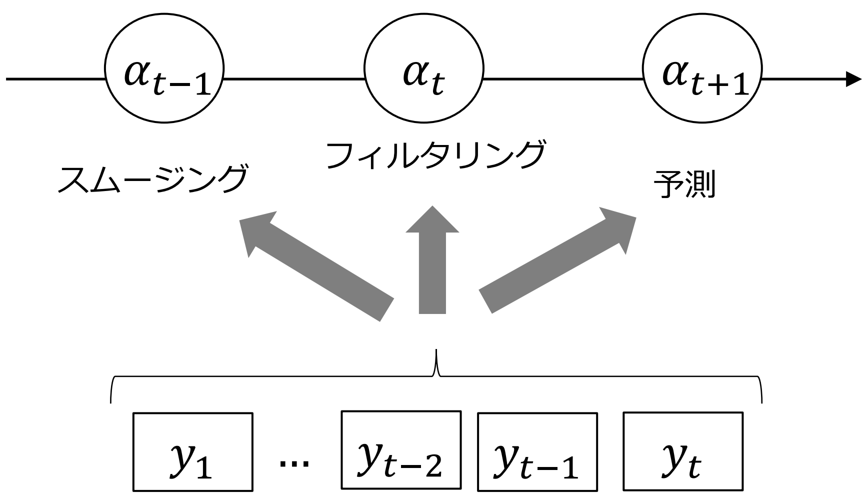
$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

$\boxed{\text{状態}}$

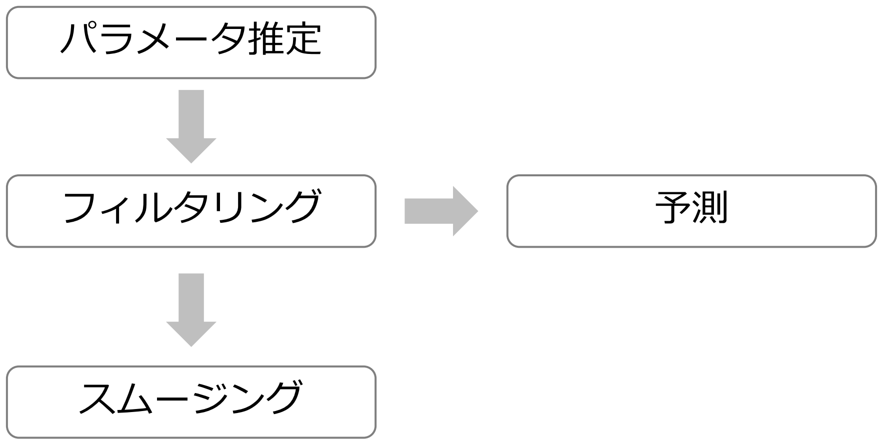
パラメータ

■ カルマンフィルタによる状態推定

- **フィルタリング:** 現在の状態の推定
- **スムージング** (平滑化) : 過去の状態の推定
- **予測:** 未来の状態の推定



■ 一般的な手順



■ 数値例

時系列

$$\{4.4, 4.0, 3.5, 4.6\}$$

に、撹乱項が正規性を持つローカル・レベル・モデル (確率的レベル)

$$Y_t = \boxed{\mu_t} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$
$$\mu_{t+1} = \mu_t + \xi_t, \qquad \xi_t \sim N\left(0, \sigma_\xi^2\right)$$

状態

パラメータ

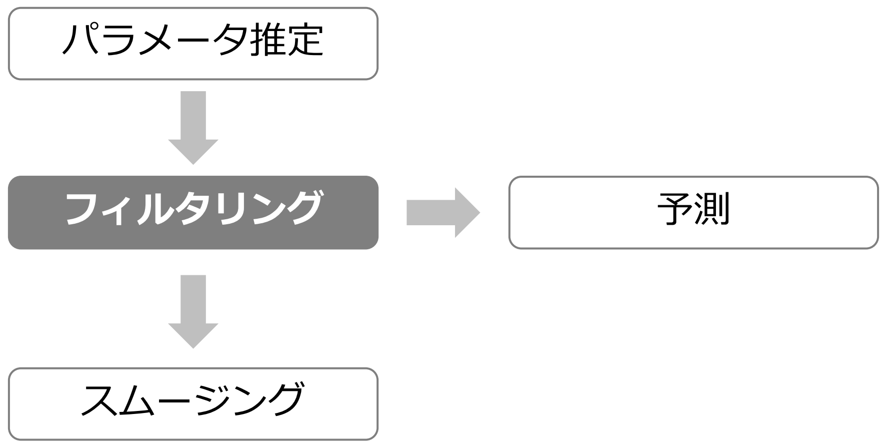
をあてはめる。

当面の説明の都合上、パラメータは以下とする：

$$\sigma_\varepsilon^2 = 1, \qquad \sigma_\xi^2 = 4$$

数値例出典: 森平(2019)

2-1. フィルタリングによる状態推定



■ フィルタリングとは:

$a_{t+1|t} \equiv E[\alpha_{t+1}|y_t, \dots, y_1], P_{t+1|t} \equiv Var[\alpha_{t+1}|y_t, \dots, y_1]$として、

$t = 1, \dots, T$について逐次的に以下を求める (Durbin & Koopman, 2012, p.85)。

$$v_t = y_t - Z_t a_{t|t-1}, \qquad F_t = Z_t P_{t|t-1} Z_t^T + H_t,$$

$$a_{t|t} = a_{t|t-1} + P_{t|t-1} Z_t^T F_t^{-1} v_t, \qquad P_{t|t} = P_{t|t-1} - P_{t|t-1} Z_t^T F_t^{-1} Z_t P_{t|t-1},$$

$$a_{t+1|t} = T_t a_{t|t}, \qquad P_{t+1|t} = T_t P_{t|t} T_t^T + R_t Q_t R_t^T$$

…といわれても困ると思いますので、

以下では数値例を使って、できるかぎりやさしく解説します。

■ 状態変数の期待値と分散

状態変数 α_t (数値例では μ_t) の値は、結局のところ、わからない。
しかし、それを確率変数と捉え、その期待値と分散を推定することはできる。

観測値 $y_1, \ldots, y_t$が手に入っている時点からみた、時点 $t+1$の状態変数の期待値と分散を、それぞれ $a_{t+1}, P_{t+1|t}$ と書こう。

$$a_{t+1|t} \equiv E[\alpha_{t+1}|y_t, \ldots, y_1]$$
$$P_{t+1|t} \equiv Var[\alpha_{t+1}|y_t, \ldots, y_1]$$

数値例では

$$a_{t+1|t} \equiv E[\mu_{t+1}|y_t, \ldots, y_1]$$
$$P_{t+1|t} \equiv Var[\mu_{t+1}|y_t, \ldots, y_1]$$

$a_{t+1|t}$は、次の時点における状態の値の、現時点における予測値である。
$P_{t+1|t}$は、その予測値が持っているばらつき、すなわち予測の不確実性を表している。

Step 1. 状態変数に**初期値**と分散を与える

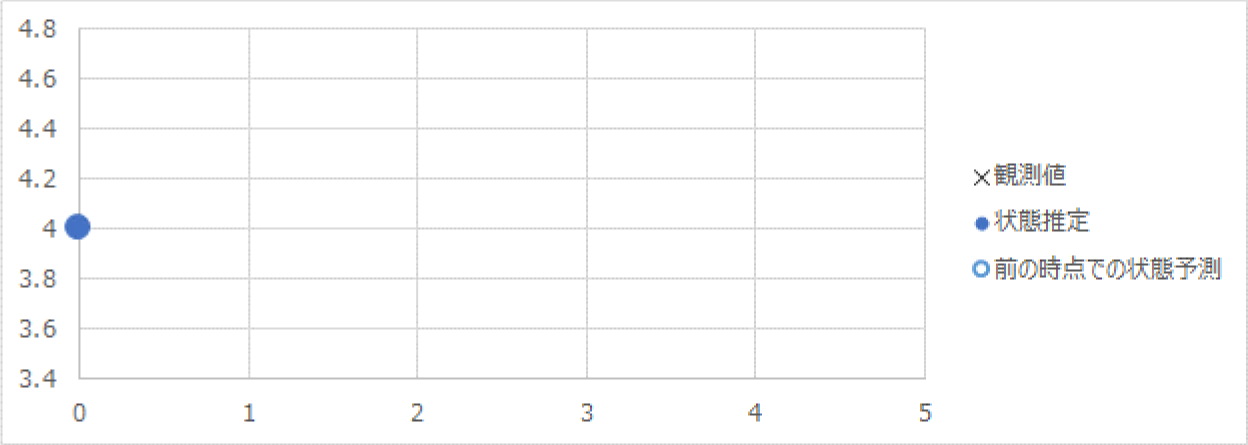
- 時点0の段階での、時点0の状態の推定値 $a_{0|0}$ と、その分散の推定値$P_{0|0}$を決める

- 「散漫初期化」という方法を使って決めることが多い
  - ある程度長い時系列であれば、どのように決めても結果はあまり変わらない
  - 説明は省略します

- 数値例では
  - 説明の都合上、$a_{0|0} = 4, P_{0|0} = 12$とします

観察撹乱項の分散	sigma^2_epsilon	1
状態撹乱項の分散	sigma^2_xi	4

時点	観測値	前の時点における予測		その時点における評価			その時点における推定	
		状態	状態の分散	予測誤差	予測誤差分散	カルマンゲイン	状態	状態の分散
t	y[t]	a[t|t-1]	P[t|t-1]	v[t]	F[t]	G[t]	a[t|t]	P[t|t]
0							4.000	12.000
1								
2								
3								
4								



上の表とチャートは森平(2019)を参考に作成した

Step 2. 時点 0 から時点1への**一期先予測**を行う

状態の期待値は

$$a_{1|0} = T_1 a_{0|0}$$

分散は

$$P_{1|0} = T_0 P_{0|0} T_0^T + R_0 Q_0 R_0^T$$

- 数値例では
  - 状態方程式は $\mu_{t+1} = \mu_t + \xi_t$ であり、ξ_t の平均は0, 分散はσ_ξ^2
  - 従って、状態の推定値はかわらない

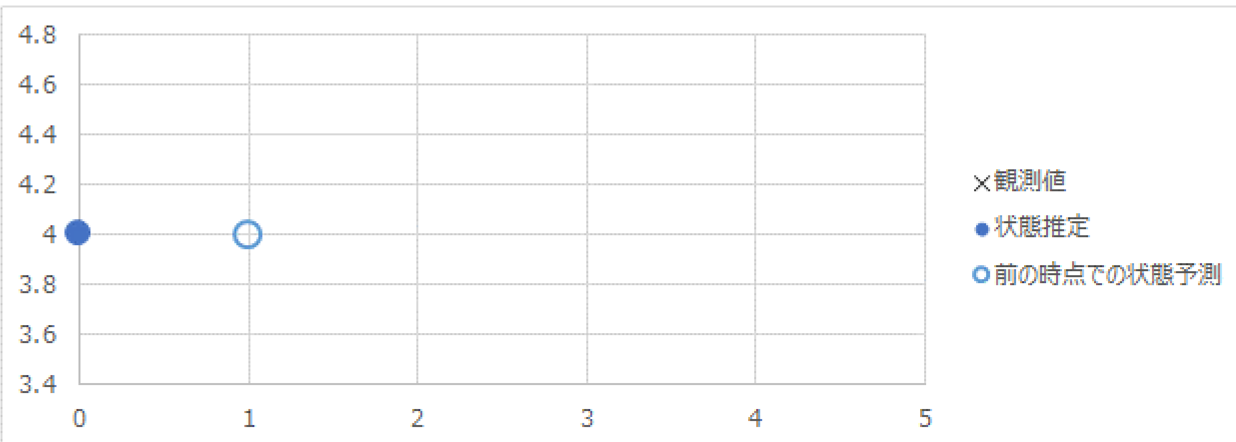
$$a_{1|0} = a_{0|0} = 4$$

  - 分散の推定値は、状態撹乱項の分散の分だけ増える

$$P_{1|0} = P_{0|0} + \sigma_\varepsilon^2 = 4 + 12 = 16$$

観察撹乱項の分散	sigma^2_epsilon	1
状態撹乱項の分散	sigma^2_xi	4

時点	観測値	前の時点における予測		その時点における評価			その時点における推定	
		状態	状態の分散	予測誤差	予測誤差分散	カルマンゲイン	状態	状態の分散
t	y[t]	a[t|t-1]	P[t|t-1]	v[t]	F[t]	G[t]	a[t|t]	P[t|t]
0							4.000	12.000
1		4.000	16.000					
2								
3								
4								



Step 3. 時点1の観察値を手に入れ、**一期先予測誤差**とその分散を求める

予測誤差は

$$v_1 = y_1 - Z_1 a_{1|0}$$

その分散は

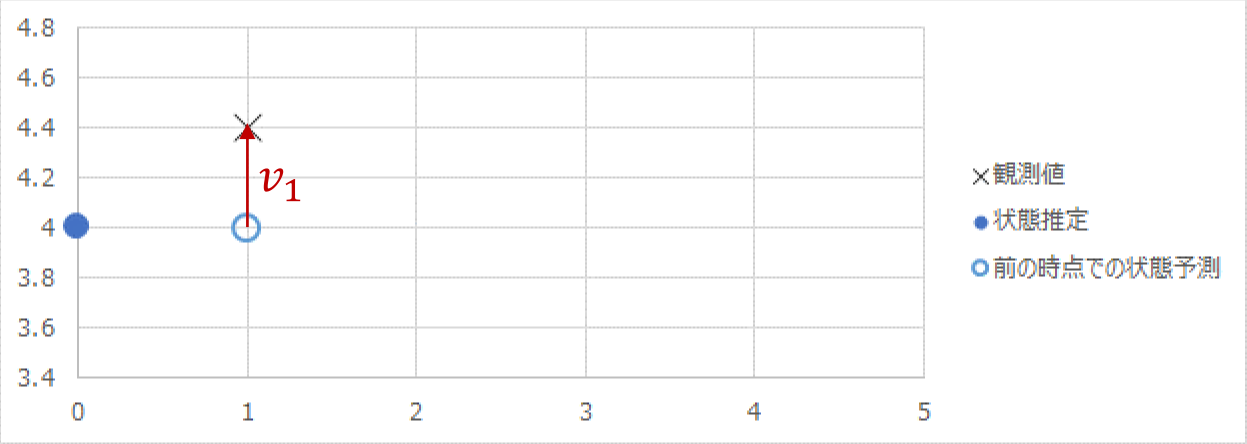
$$F_1 = Z_1 P_{1|0} Z_1^T + H_1$$

- 数値例では
  - 観察方程式は$Y_t = \mu_t + \varepsilon_t$であり、$\varepsilon_t$の平均は0, 分散は$\sigma_\varepsilon^2$である
  - 従って、時点1についての予測値は$a_{1|0}$, その分散の推定値は$P_{1|0} + \sigma_\varepsilon^2$

  - さて、時点1の観察値は$y_1 = 4.4$であった
  - 一期先予測誤差は
$$v_1 = y_1 - a_{1|0} = 4.4 - 4 = 0.4$$
  - 一期先予測誤差の分散の推定値は、予測値の分散の推定値と同じく
$$F_1 = P_{1|0} + \sigma_\varepsilon^2 = 16 + 1 = 17$$

観察撹乱項の分散	sigma^2_epsilon	1
状態撹乱項の分散	sigma^2_xi	4

時点	観測値	前の時点における予測		その時点における評価			その時点における推定	
		状態	状態の分散	予測誤差	予測誤差分散	カルマンゲイン	状態	状態の分散
t	y[t]	a[t|t-1]	P[t|t-1]	v[t]	F[t]	G[t]	a[t|t]	P[t|t]
0							4.000	12.000
1	**4.4**	4.000	16.000	0.400	17.000			
2								
3								
4								



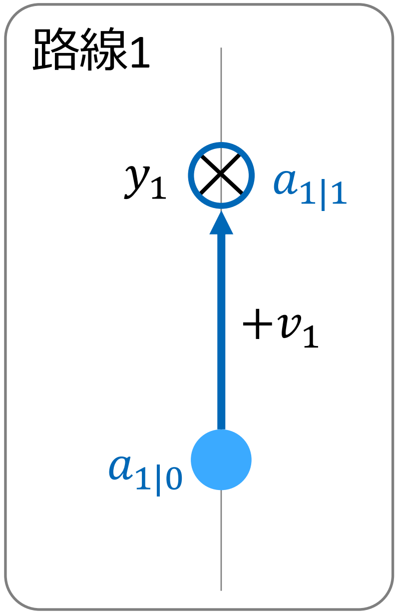
Step 4. **カルマンゲイン**を求める

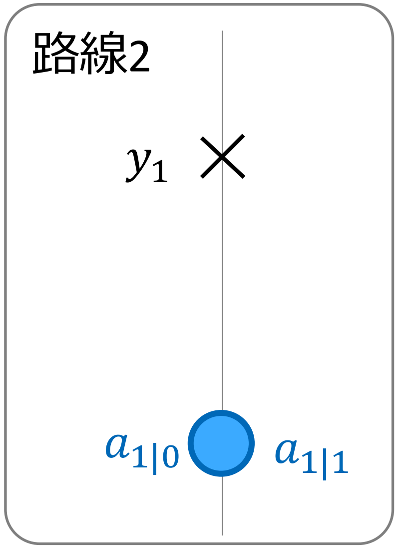
$$G_1 = P_{1|0} Z_1^T F_1^{-1}$$

- ここで問題になっていること
    - 時点1の観測値に基づき、状態の推定値を修正したい
    - どこまで修正すればよいのか？

注) カルマンゲインは正確には$T_t P_{t|t-1} Z_t^T F_t^{-1}$を指すが、ここでは説明を簡略にするため$G_t = P_{t|t-1} Z_t^T F_t^{-1}$をカルマンゲインと呼ぶことにする。ここでの数値例では$T_t = I$なので、実質的なちがいはない。

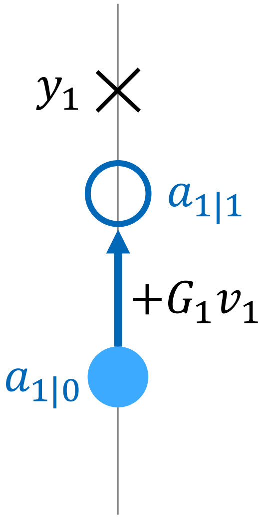
- ふたつの極端な路線がある
    - 路線1: 状態の推定値に一期先予測誤差を加える
        - $a_{1|1} = a_{1|0} + v_1 = 4 + 0.4 = 4.4$
        - 予測誤差v_1は状態推定に由来すると考える
        - データに学ぶ(振り回される)路線
    - 路線2: 状態の推定値を一切修正しない
        - $a_{1|1} = a_{1|0} = 4$
        - 予測誤差v_1は観察撹乱項 ε_1に由来すると考える
        - データから学ばない路線
- どちらも極端すぎる。中間をとりたい





- ふたつの路線の中間をとって、次のように更新する

$$a_{1|1} = a_{1|0} + G_1 v_1$$



  - G_1を**カルマンゲイン**と呼ぶ
    - 0以上1以下の値とする
  - カルマンゲインは「**データから学ぶ程度**」を表す

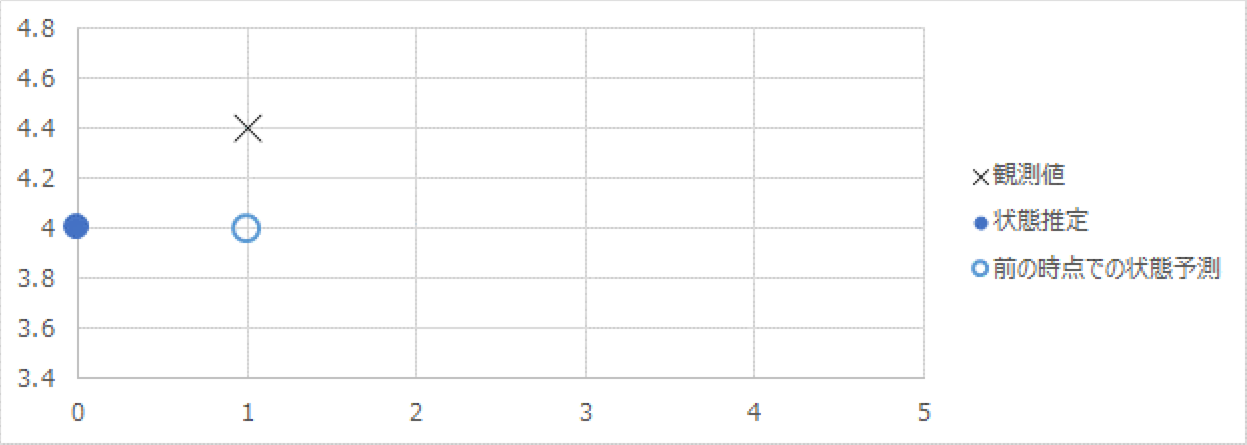
- カルマンゲインに求められる性質
  - もし一期先予測誤差v_tがすべて状態推定に由来するなら、路線1が正しい
    → 一期先予測誤差の分散F_1のすべてが状態推定の分散$P_{1|0}$なら、カルマンゲインを1にしたい
  - もし一期先予測誤差v_tがすべて観察撹乱項 ε_tに由来するなら、路線2が正しい
    → 一期先予測誤差の分散F_1のすべてが観察撹乱項の分散σ_ε^2なら、カルマンゲインを0にしたい
- カルマンゲインを求める

$$G_1 = \frac{P_{1|0}}{F_1} = \frac{P_{1|0}}{P_{1|0} + \sigma_\varepsilon^2} = \frac{16}{17} = 0.941$$

状態推定の分散　観察撹乱項の分散

観察撹乱項の分散	sigma^2_epsilon	1
状態撹乱項の分散	sigma^2_xi	4

時点	観測値	前の時点における予測		その時点における評価			その時点における推定	
		状態	状態の分散	予測誤差	予測誤差分散	カルマンゲイン	状態	状態の分散
t	y[t]	a[t|t-1]	P[t|t-1]	v[t]	F[t]	G[t]	a[t|t]	P[t|t]
0							4.000	12.000
1	**4.4**	4.000	16.000	0.400	17.000	0.941		
2								
3								
4								



Step 5. **状態の推定値を修正する。**

時点1の状態の推定値は

$$a_{1|1} = a_{1|0} + G_1 v_1$$

その分散の推定値は

$$P_{1|1} = P_{1|0} - G_1 Z_1 P_{1|0}$$

- 数値例では
  - 状態の推定値は

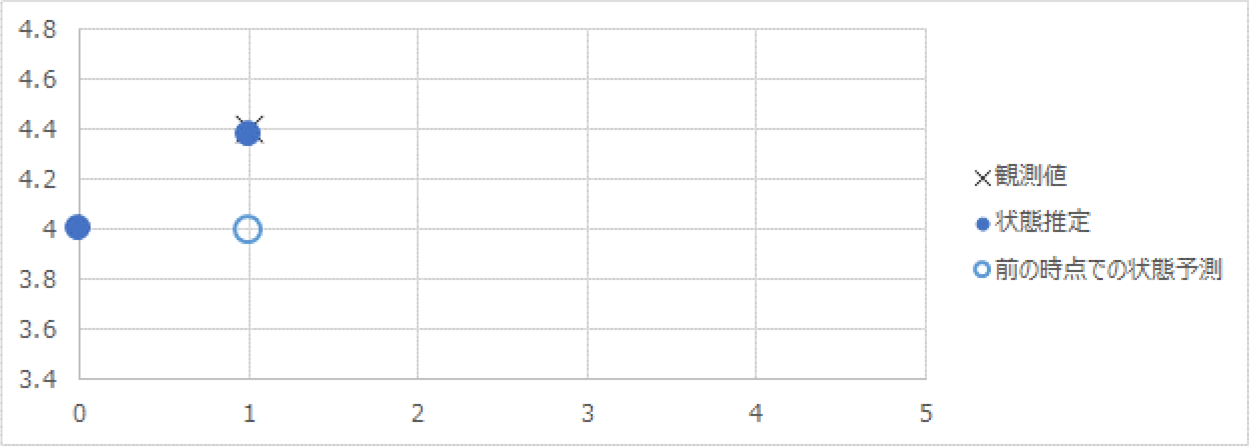
    $$a_{1|1} = a_{1|0} + G_1 v_1 = 4 + 0.941 \times 0.400 = 4.376$$

  - その分散は、一期先予測誤差が状態推定に由来する分だけ小さくなり

    $$P_{2|1} = P_{1|0} - G_1 P_{1|0} = 16 - (0.941 \times 16) = 0.941$$

観察撹乱項の分散	sigma^2_epsilon	1
状態撹乱項の分散	sigma^2_xi	4

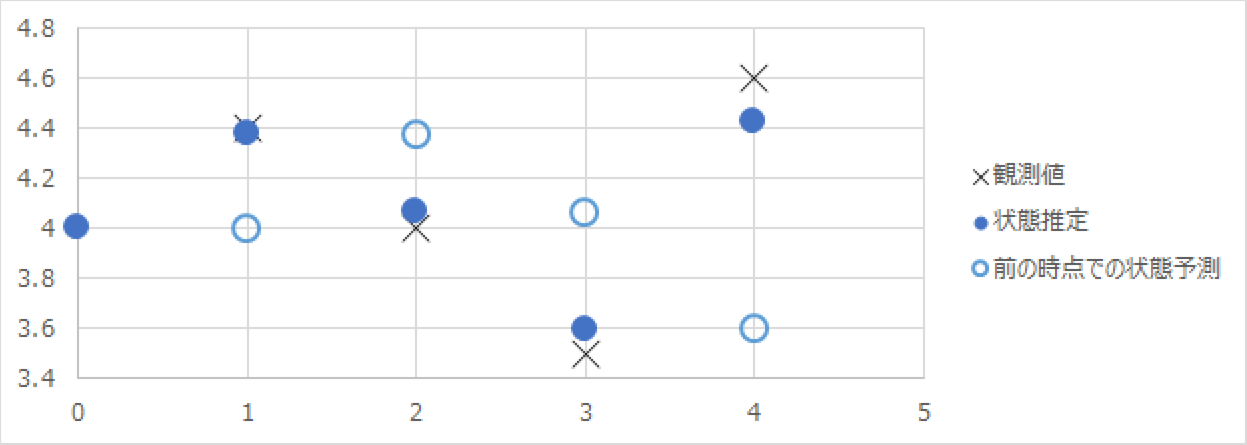
時点	観測値	前の時点における予測		その時点における評価			その時点における推定	
		状態	状態の分散	予測誤差	予測誤差分散	カルマンゲイン	状態	状態の分散
t	y[t]	a[t|t-1]	P[t|t-1]	v[t]	F[t]	G[t]	a[t|t]	P[t|t]
0							4.000	12.000
1	**4.4**	4.000	16.000	0.400	17.000	0.941	**4.376**	0.941
2								
3								
4								



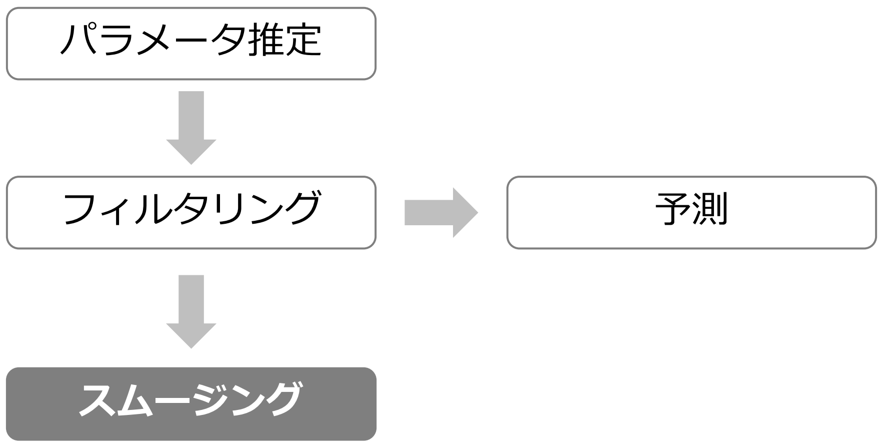
Step 2-5 を時点2以降について繰り返し、状態を推定する

観察撹乱項の分散	sigma^2_epsilon	1
状態撹乱項の分散	sigma^2_xi	4

時点	観測値	前の時点における予測		その時点における評価			その時点における推定	
		状態	状態の分散	予測誤差	予測誤差分散	カルマンゲイン	状態	状態の分散
t	y[t]	a[t|t-1]	P[t|t-1]	v[t]	F[t]	G[t]	a[t|t]	P[t|t]
0							4.000	12.000
1	**4.4**	4.000	16.000	0.400	17.000	0.941	**4.376**	0.941
2	**4.0**	4.376	4.941	-0.376	5.941	0.832	**4.063**	0.832
3	**3.5**	4.063	4.832	-0.563	5.832	0.829	**3.597**	0.829
4	**4.6**	3.597	4.829	1.003	5.829	0.828	**4.428**	0.828



2-2. スムージングによる状態推定



■ スムージングとは:

$t = 1, \ldots, T$についてy_tが得られているとき、
状態の推定値 $a_{t|T}$とその分散の推定値$P_{t|T}$を、
$t = T - 1, \ldots 1$の順に逐次的に求める

- 前項のモデル (ローカル・レベル・モデル, 確率的レベル)の場合、下式となる

$$a_{t|T} = a_{t|t} + \frac{P_{t|t}}{P_{t+1|t}}(a_{t+1|T} - a_{t|t})$$

$$P_{t|N} = P_{t|t} + \left(\frac{P_{t|t}}{P_{t+1|t}}\right)^2 (P_{t+1|T} - P_{t+1|t})$$

(説明は省略)

- 時点3について考えよう
  - フィルタリングによる状態推定 $a_{3|3} = 3.597$は、あとで振り返ると小さすぎたかもしれない。修正すべきか？

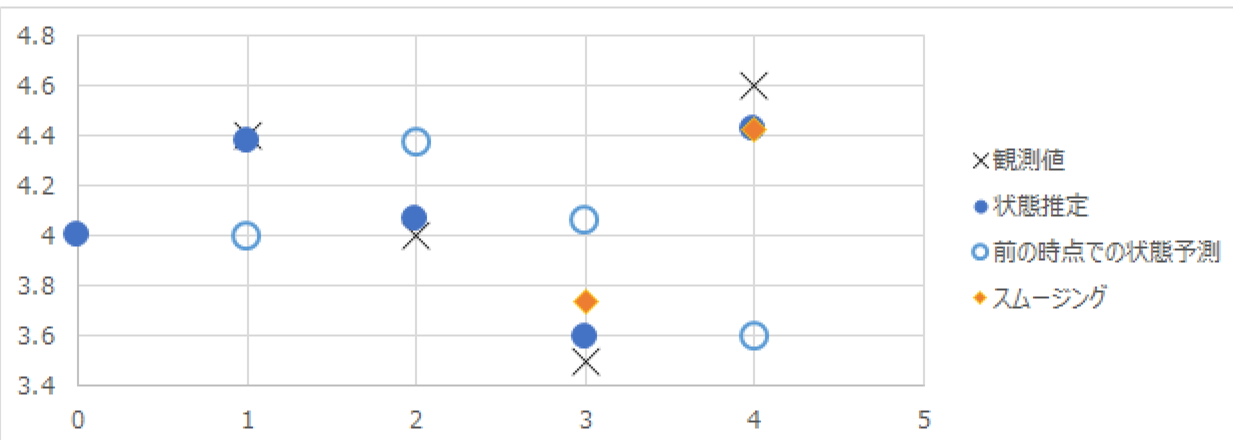
  - 修正すべき程度は、次の2つの要因で決まる
    - 時点3からみた時点3の状態推定$a_{3|3}$と、あとで振り返った**(=時点4からみた)**時点4の状態推定$a_{4|4}$のずれ。それが大きいとき、$a_{3|3}$を増やしてやりたい
    $$a_{4|4} - a_{3|3} = 4.428 - 3.597 = 0.831$$
    - 時点3からみたとき、状態の分散は、時点3から4になるときにどのくらい増えたと推定されるか。それが大きいときは、あとで振り返った修正は控えめにしたい
    $$\frac{P_{4|3}}{P_{3|3}} = \frac{4.829}{0.829} = 5.827$$

  - そこで、時点3の状態推定を次のように修正する

$$a_{3|4} = a_{3|3} + \frac{P_{3|3}}{P_{4|3}}\left(a_{4|4} - a_{3|3}\right) = 3.957 + \frac{0.831}{5.827} = 3.739$$

観察撹乱項の分散	sigma^2_epsilon	1
状態撹乱項の分散	sigma^2_xi	4

時点	観測値	前の時点における予測		その時点における評価			その時点における推定		スムージング		
		状態	状態の分散	予測誤差	予測誤差分散	カルマンゲイン	状態	状態の分散	推定のずれ	分散の拡大	状態推定
t	y[t]	a[t|t-1]	P[t|t-1]	v[t]	F[t]	G[t]	a[t|t]	P[t|t]	a[t|T]-a[t|t]	P[t+1|t]/P[t|t]	a[t|T]
0							4.000	12.000			
1	**4.4**	4.000	16.000	0.400	17.000	0.941	**4.376**	0.941			
2	**4.0**	4.376	4.941	-0.376	5.941	0.832	**4.063**	0.832			
3	**3.5**	4.063	4.832	-0.563	5.832	0.829	**3.597**	0.829	0.831	5.828	**3.739**
4	**4.6**	3.597	4.829	1.003	5.829	0.828	**4.428**	0.828			**4.428**



- 時点2について考えよう
  - フィルタリングによる状態推定 $a_{2|2} = 4.063$は修正すべきか？

  - 修正すべき程度は、次の2つの要因で決まる
    - 時点2からみた時点2の状態推定$a_{2|2}$と、あとで振り返った(=**スムージングで得た)**時点3の状態推定$a_{3|4}$のずれ。大きいとき、$a_{2|2}$を増やしてやりたい
      $$a_{3|4} - a_{3|3} = 3.739 - 4.063 = -0.324$$
    - 時点2からみたとき、状態の分散は、時点2から3になるときにどのくらい増えたと推定されるか。それが大きいときは、あとで振り返った修正は控えめにしたい
      $$\frac{P_{3|2}}{P_{2|2}} = \frac{4.832}{0.832} = 5.810$$

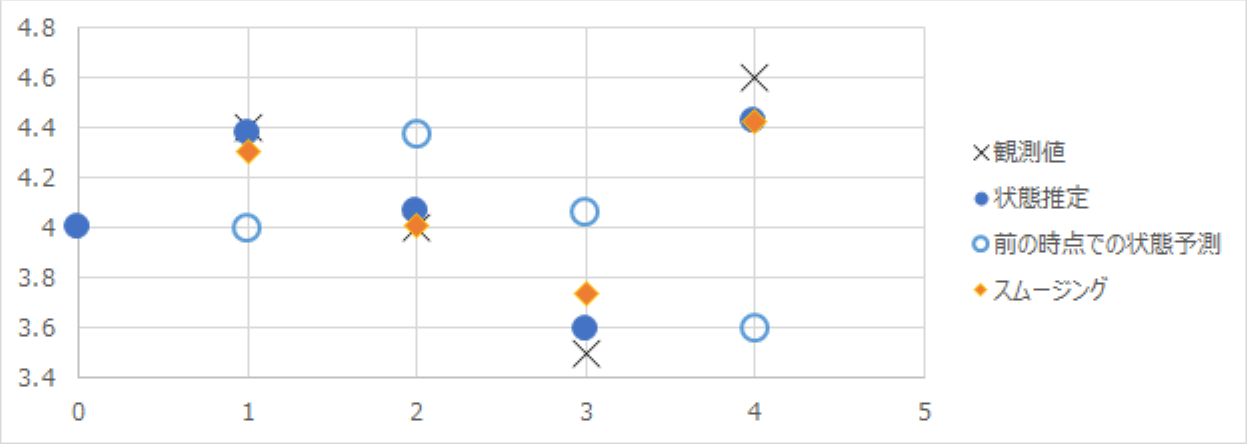
  - そこで、時点3の状態推定を次のように修正する

$$a_{2|4} = a_{2|2} + \frac{P_{2|2}}{P_{3|2}}\left(a_{4|4} - a_{3|3}\right) = 4.063 + \frac{-0.324}{5.810} = 4.008$$

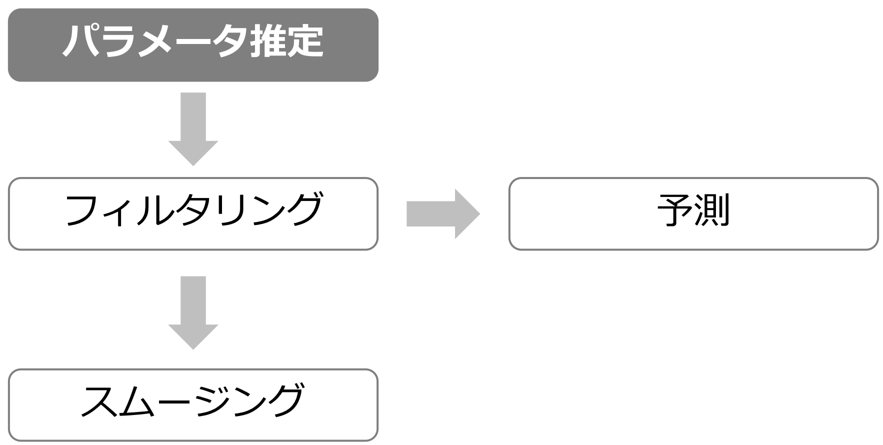
- 時点1についても同様に求めて、

観察撹乱項の分散	sigma^2_epsilon	1
状態撹乱項の分散	sigma^2_xi	4

時点	観測値	前の時点における予測		その時点における評価			その時点における推定		スムージング		
		状態	状態の分散	予測誤差	予測誤差分散	カルマンゲイン	状態	状態の分散	推定のずれ	分散の拡大	状態推定
t	y[t]	a[t|t-1]	P[t|t-1]	v[t]	F[t]	G[t]	a[t|t]	P[t|t]	a[t|T]-a[t|t]	P[t+1|t]/P[t|t]	a[t|T]
0							4.000	12.000			
1	**4.4**	4.000	16.000	0.400	17.000	0.941	**4.376**	0.941	-0.369	5.250	**4.306**
2	**4.0**	4.376	4.941	-0.376	5.941	0.832	**4.063**	0.832	-0.324	5.810	**4.008**
3	**3.5**	4.063	4.832	-0.563	5.832	0.829	**3.597**	0.829	0.831	5.828	**3.739**
4	**4.6**	3.597	4.829	1.003	5.829	0.828	**4.428**	0.828			**4.428**



2-3. パラメータ推定



■ フィルタリング＆最尤法によるパラメータ推定

一期先予測誤差 v_t は、平均 0, 分散 F_tの正規分布に従う (証明略)

時点 t における一期先予測誤差の尤度は

$$L_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi F_t}} \exp(-\frac{v_t^2}{2F_t})$$

時点$1, \dots, T$における一期先予測誤差 $v_1, \dots, v_T$の尤度は

$$L = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi F_t}} \exp(-\frac{v_t^2}{2F_t})$$

対数尤度関数は

$$\log L = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(\log F_t - \frac{v_t^2}{F_t})$$

これを最大化するパラメータを求めればよい！

観察撹乱項の分散	sigma^2_epsilon	1
状態撹乱項の分散	sigma^2_xi	4

パラメータを変えて…

時点	観測値	前の時点における予測		その時点における評価			その時点における推定		パラメータ推定
		状態	状態の分散	予測誤差	予測誤差分散	カルマンゲイン	状態	状態の分散	対数尤度(定数項を除く)
t	y[t]	a[t|t-1]	P[t|t-1]	v[t]	F[t]	G[t]	a[t|t]	P[t|t]	log(F[t])+(v[t]^2)/F[t]
0							4.000	12.000	
1	**4.4**	4.000	16.000	0.400	17.000	0.941	**4.376**	0.941	2.8426
2	**4.0**	4.376	4.941	-0.376	5.941	0.832	**4.063**	0.832	1.8058
3	**3.5**	4.063	4.832	-0.563	5.832	0.829	**3.597**	0.829	1.8177
4	**4.6**	3.597	4.829	1.003	5.829	0.828	**4.428**	0.828	1.9355
									計
									8.4016

対数尤度関数を最大化する

3. Rによる状態空間モデルの推定

■ R でカルマンフィルタを使う

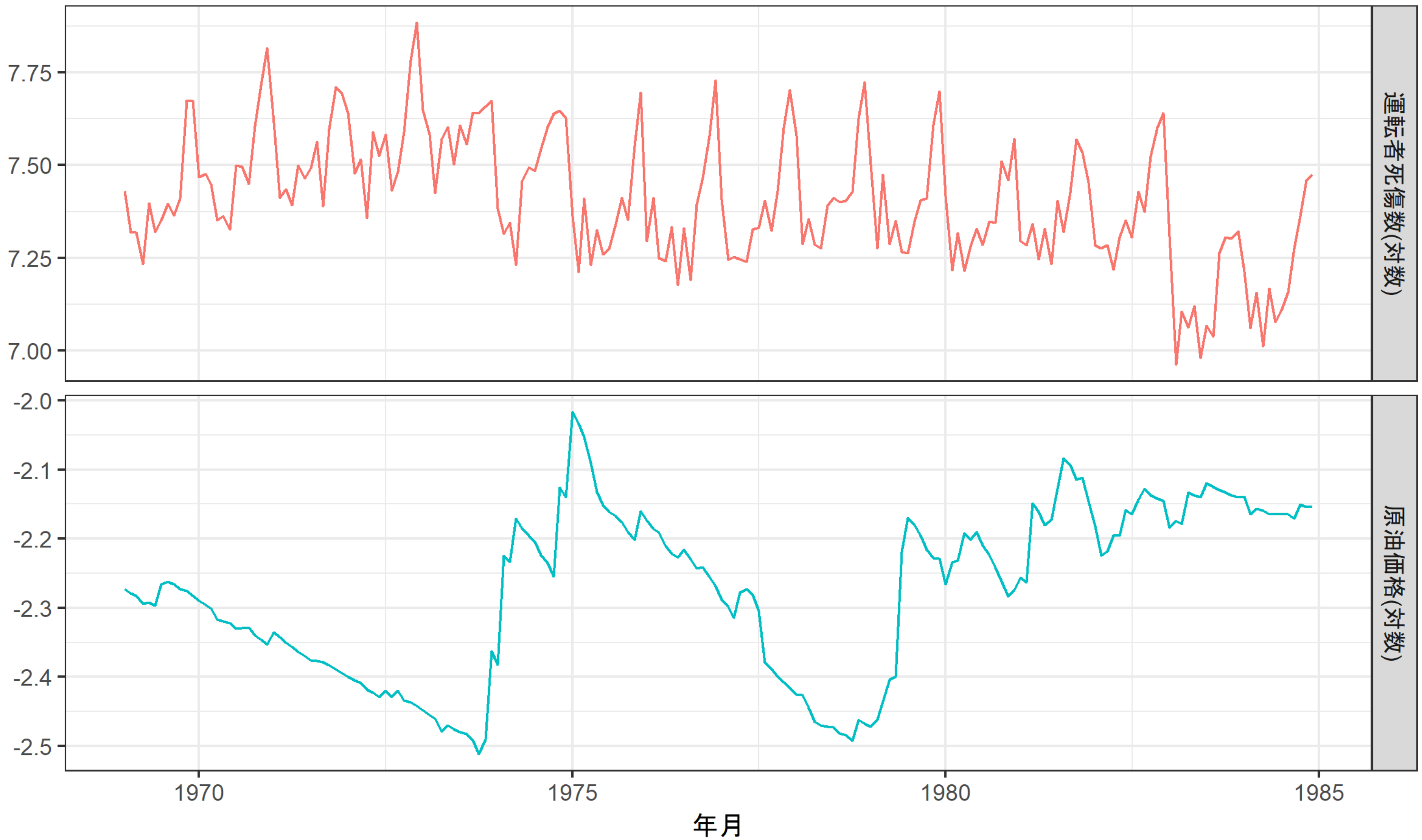
- dlm パッケージ
- KFASパッケージ
- …

このセミナーでは、KFASパッケージを紹介します

サンプルデータ： 英国自動車事故 (一部は5章で既出)

- 英国の自動車事故による運転者死傷数と石油価格の月次データ
- いずれも対数をとることにしよう

Code 1



INSIGHT FACTORY

状態空間表現では

$$y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$
$$y_t = 1\mu + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$
$$\mu = 1\mu$$

```
library(KFAS)

# モデルの定義
oModel <- SSModel(
  dfUKDriver$gLogDeath ~ -1 + SSMcustom(  # 切片項がないので-1と指定
    Z     = matrix(1), # Z
    T     = matrix(1), # T
    R     = matrix(1), # R
    Q     = matrix(0), # Q
    P1inf = diag(1)  #散漫初期状態の共分散行列. 説明略
  ),
  H = matrix(NA) # H. NAは推定対象であることを表す
)
## ローカル・レベル・モデルなので、SSMtrend()を使って以下のように略記できる
# oModel <- SSModel(
#   dfUKDriver$gLogDeath ~ SSMtrend(degree=1, Q=list(matrix(0))),
#   H = matrix(NA)
# )
```

Code 2

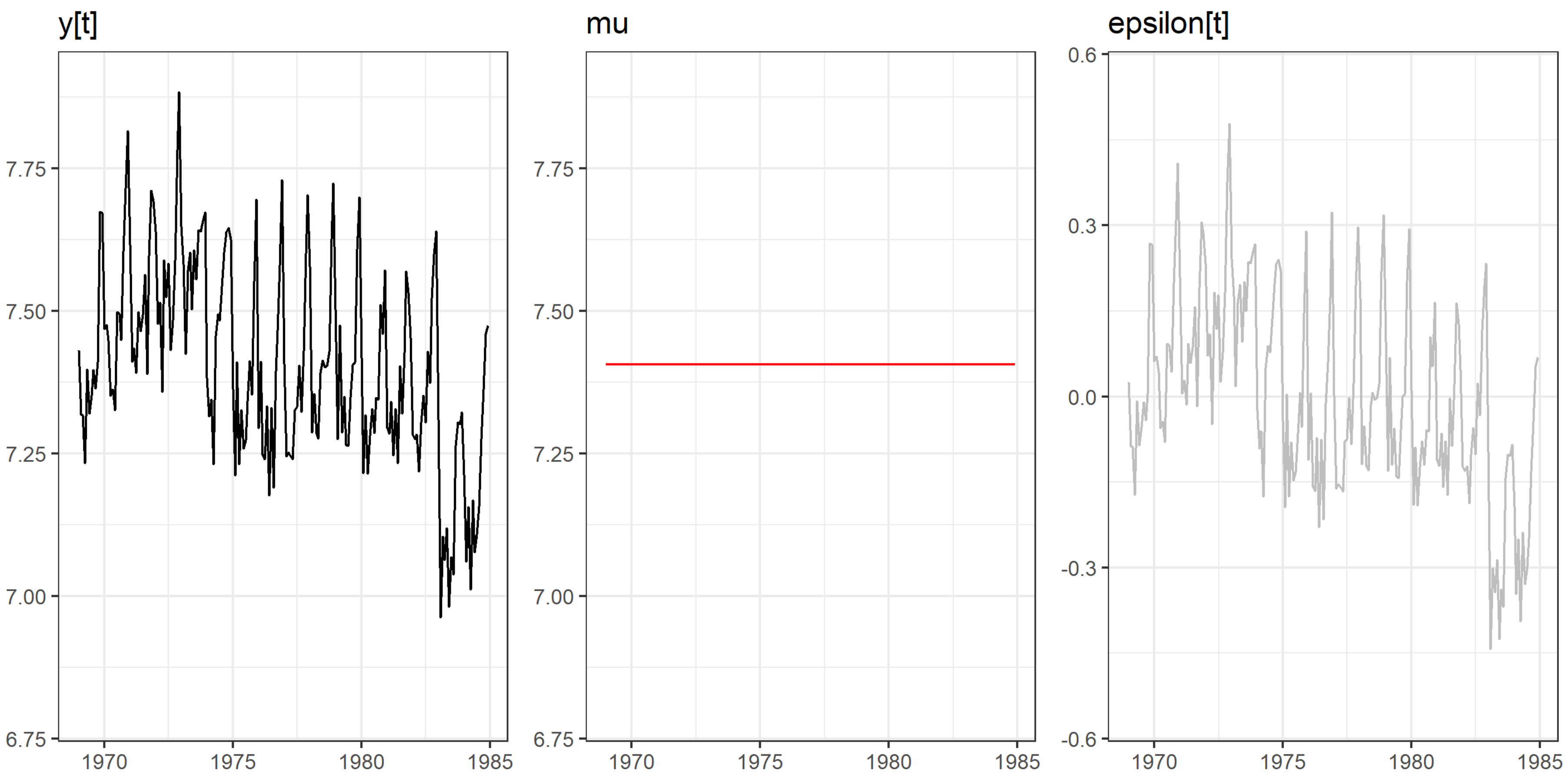
```
# 撹乱項の分散の初期値のベクトル。先頭は観察撹乱項。適当な値でよい
gInit <- var(dfUKDriver$gLogDeath) * 0.5
# パラメータ推定
oFitted <- fitSSM(
  oModel,
  inits  = log(gInit),
  method = "BFGS" # 状態変数がすべて確定的な場合は、これを指定するとよいらしい
)
cat("sigma^2_epsilon =", as.vector(oFitted$model$H), "¥n")
```

```
sigma^2_epsilon = 0.02935256
```

σ_ε^2の推定値

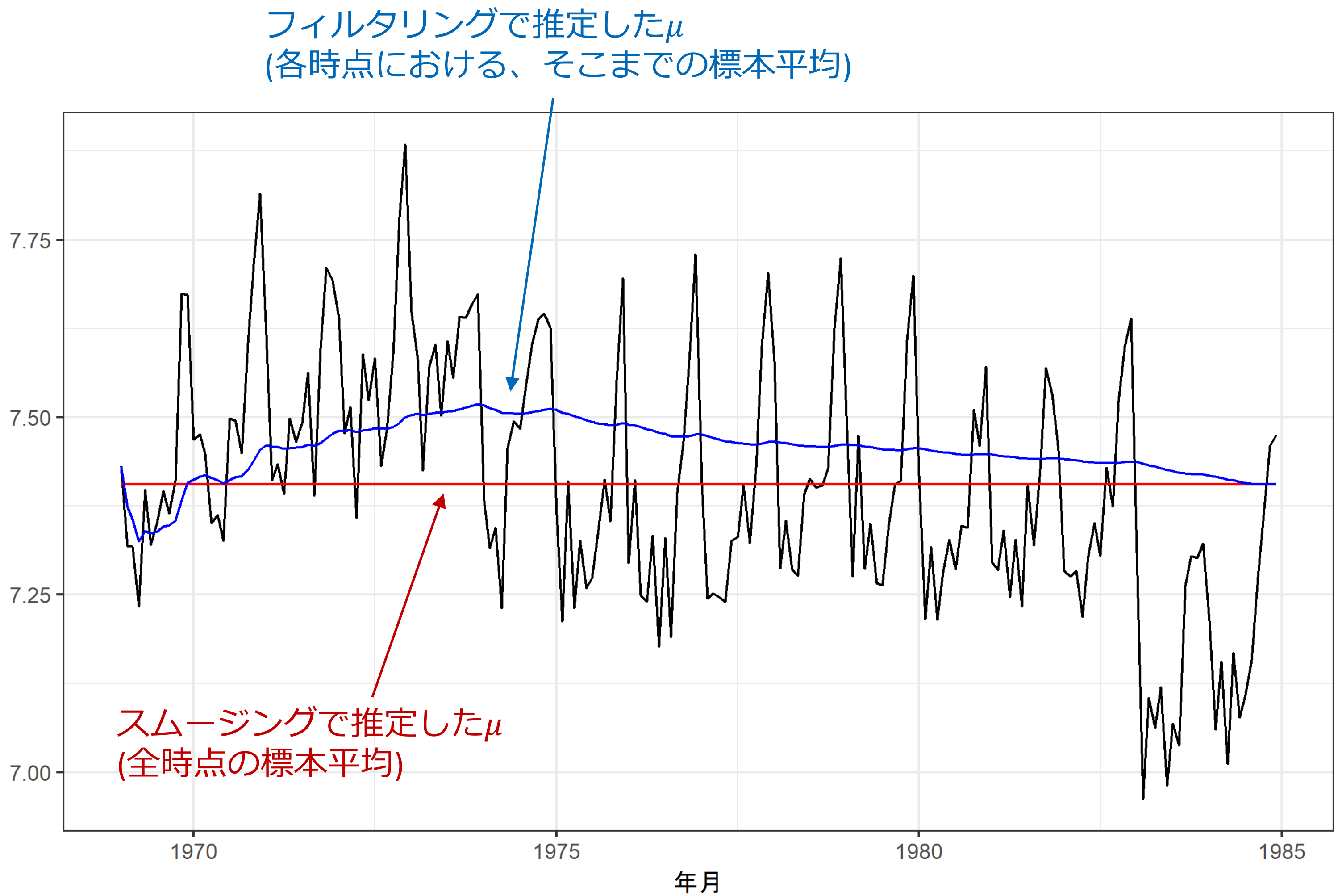
```
# 状態推定(フィルタリング, スムージング)
oEstimated   <- KFS(oFitted$model)
```

Code 2


y[t]
mu
epsilon[t]
7.75
7.50
7.25
7.00
6.75
0.6
0.3
0.0
-0.3
-0.6
1970
1975
1980
1985

参考：フィルタリングとスムージングのちがい

Code 2



INSIGHT FACTORY

状態空間表現では

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$
$$Y_t = 1\mu_t + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$
$$\mu_{t+1} = 1\mu_t + 1\xi_t, \qquad \xi_t \sim N(0, \sigma_\xi^2)$$

Code 3

```
# モデルの定義
oModel <- SSModel(
  dfUKDriver$gLogDeath ~ -1 + SSMcustom(  # 切片項がないので-1と指定
    Z     = matrix(1), # Z
    T     = matrix(1), # T
    R     = matrix(1), # R
    Q     = matrix(NA), # Q. NAは推定対象であることを表す
    P1inf = diag(1)
  ),
  H = matrix(NA) # H. NAは推定対象であることを表す
)
## ローカル・レベル・モデルなので、SSMtrend()を使って以下のように略記できる
# oModel <- SSModel(
#   dfUKDriver$gLogDeath ~ SSMtrend(degree=1, Q=list(matrix(NA))),
#   H = matrix(NA)
# )
```

Code 3

```
# 撹乱項の分散の初期値のベクトル。先頭は観察撹乱項。適当な値でよい
agInit <- c(var(dfUKDriver$gLogDeath)/2, 0.001)
# パラメータ推定
oFitted <- fitSSM(
  oModel,
  inits  = log(agInit)
)
cat("sigma^2_epsilon =", as.vector(oFitted$model$H), "¥n")
cat("sigma^2_xi =", as.vector(oFitted$model$Q), "¥n")
```

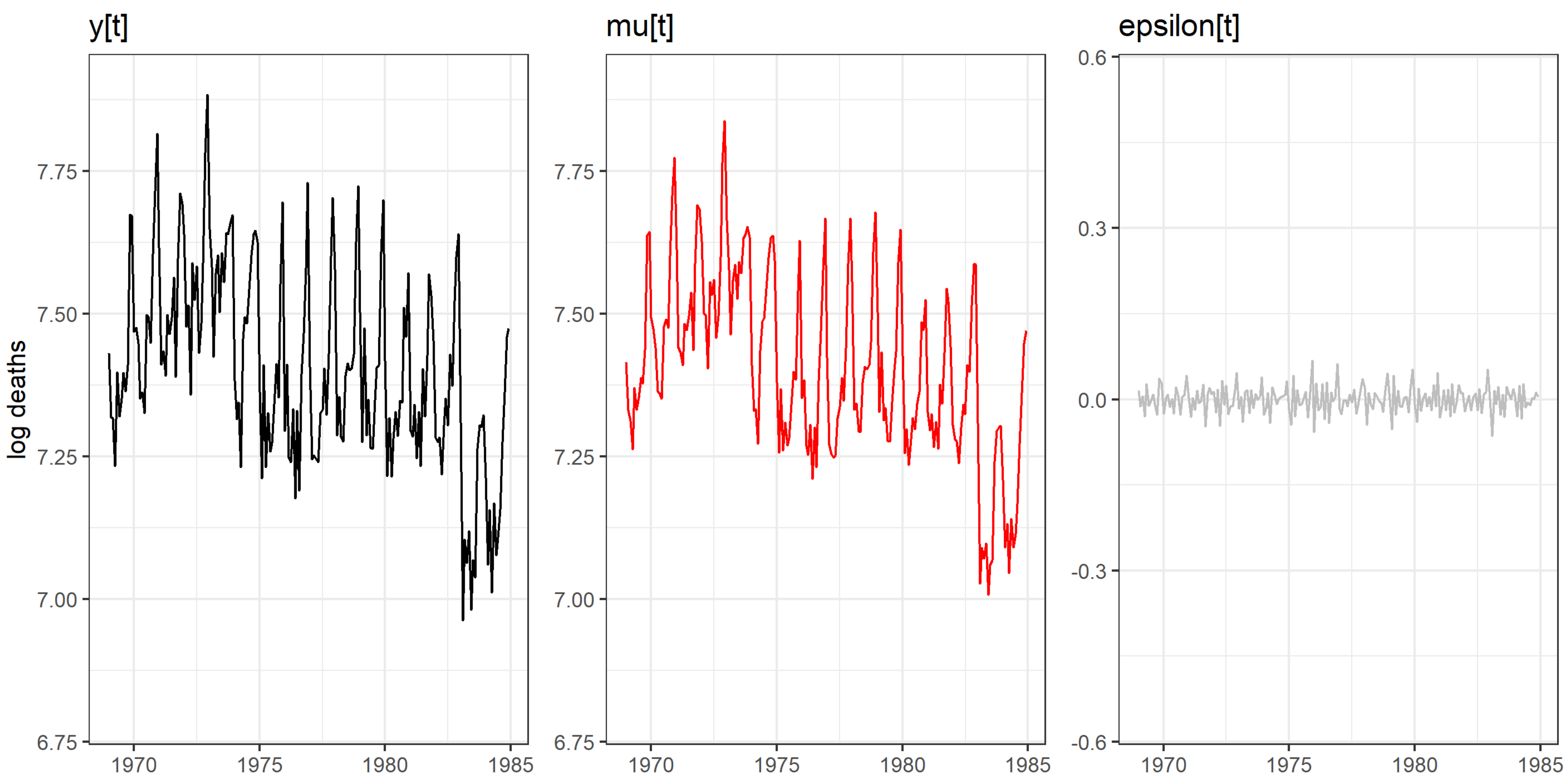
```
sigma^2_epsilon = 0.002220796
sigma^2_xi = 0.01186672
```

σ_ε^2の推定値

σ_ξ^2の推定値

```
# 状態推定(フィルタリング, スムージング)
oEstimated   <- KFS(oFitted$model)
```

Code 3

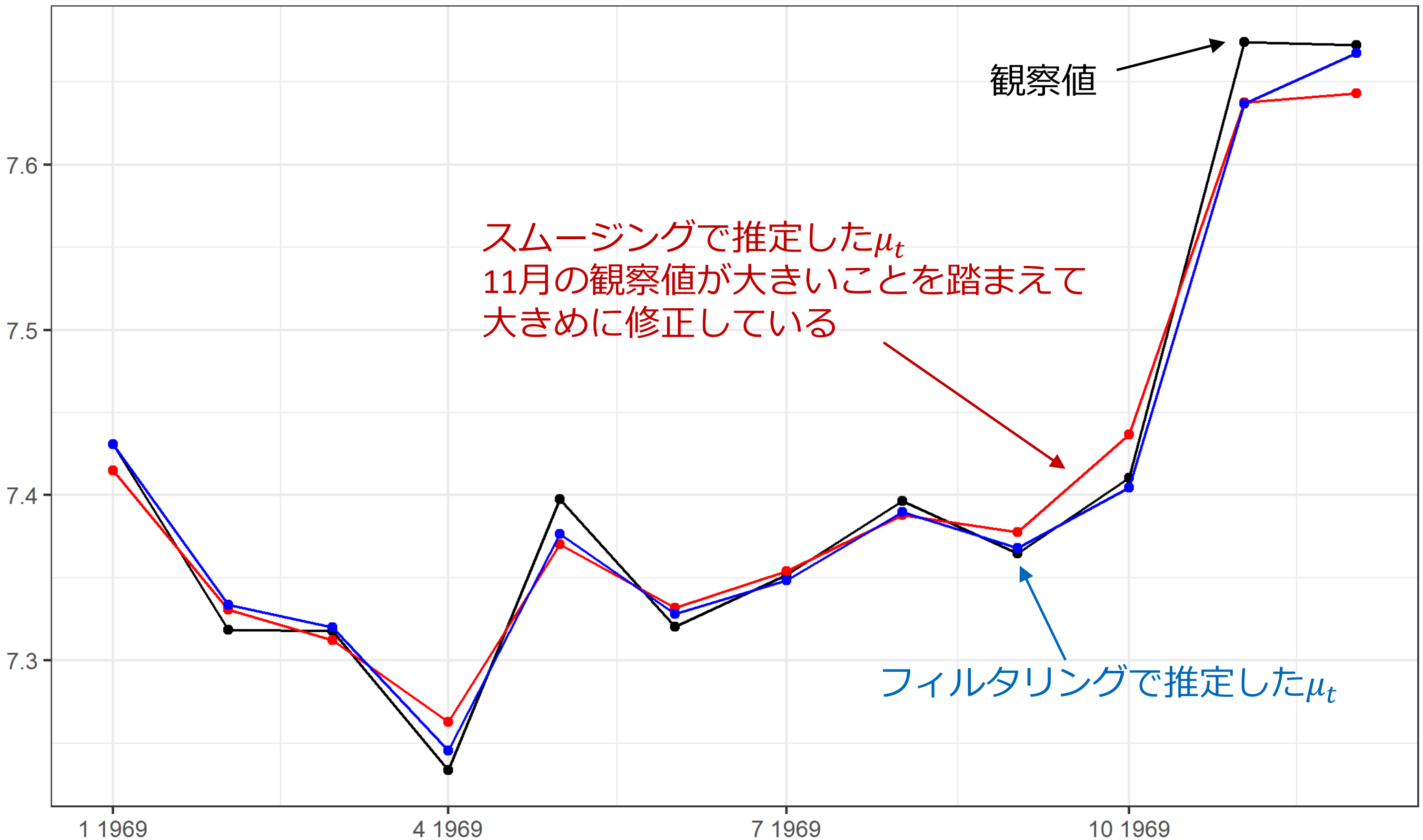


y[t]
mu[t]
epsilon[t]
log deaths
7.75
7.50
7.25
7.00
6.75
0.6
0.3
0.0
-0.3
-0.6
1970
1975
1980
1985

参考：フィルタリングとスムージングのちがい

Code 3

- 先頭の12ヶ月を示す



状態空間表現では

$$Y_t = Z_t\alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

$$Y_t = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_t \\ v_t\end{bmatrix} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\alpha_{t+1} = T_t\alpha_t + R_t\eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

$$\begin{bmatrix}\mu_{t+1} \\ v_{t+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_t \\ v_t\end{bmatrix}$$

Code 4

```
# モデルの定義
oModel <- SSModel(
  dfSeatbelts$gLogDriver ~ -1 + SSMcustom(  # 切片項がないので-1と指定
    Z     = matrix(c(1, 0), nrow=1),    # Z
    T     = matrix(c(1,0,1,1), nrow=2), # T
    R     = matrix(c(1,0,0,1), nrow=2), # R.
    Q     = matrix(c(0,0,0,0), nrow=2), # Q.
    P1inf = diag(c(1, 1))
  ),
  H = matrix(NA) # H. NAは推定対象であることを表す
)
# 線形トレンド・モデルなので、SSMtrend()を使って以下のように略記できる
# oModel <- SSModel(
#   dfSeatbelts$gLogDriver ~ SSMtrend(degree=2, Q=list(matrix(0), matrix(0))),
#   H = matrix(NA)
# )
```

Code 4

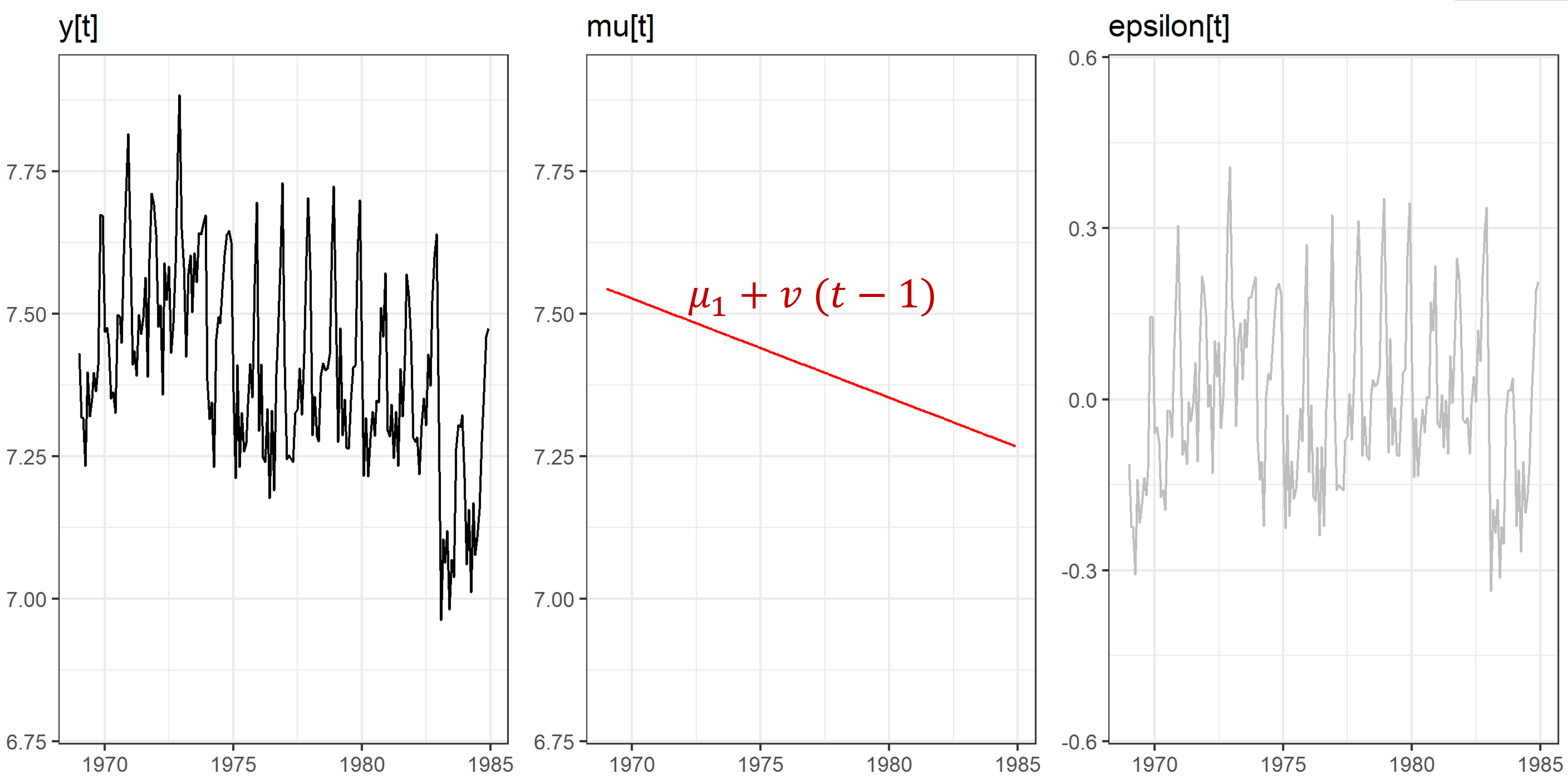
```
# パラメータ推定
gInit <- var(dfSeatbelts$gLogDriver) / 2
oFitted    <- fitSSM(
  oModel,
  inits   = log(gInit),
  method = "BFGS"
)
cat("sigma^2_epsilon =", as.vector(oFitted$model$H), "¥n")
```

```
sigma^2_epsilon = 0.002116863
sigma^2_xi = 0.01212854
```

σ_ε^2の推定値
σ_ξ^2の推定値

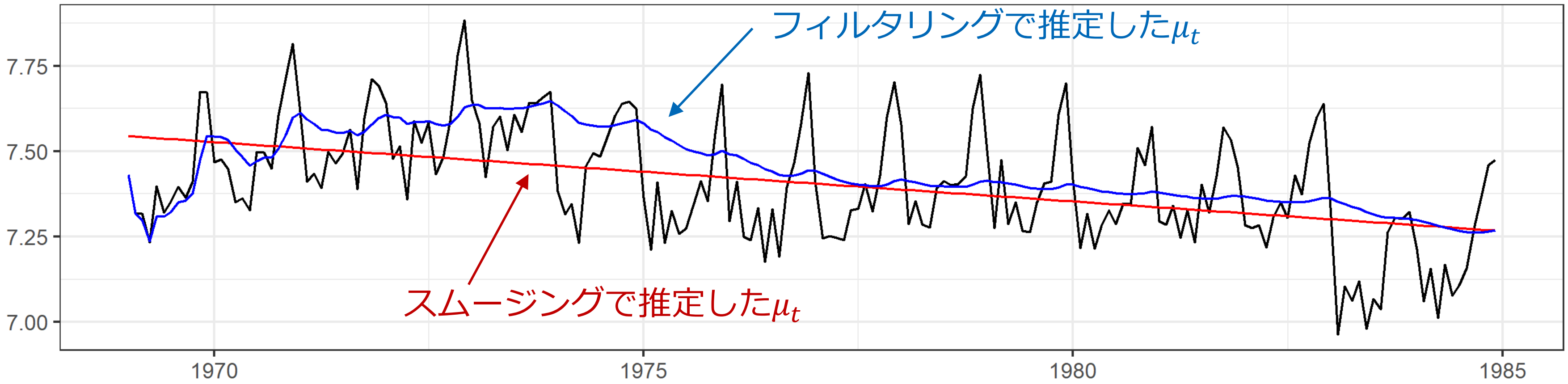
```
# 状態推定(フィルタリング, スムージング)
oEstimated    <- KFS(oFitted$model)
```

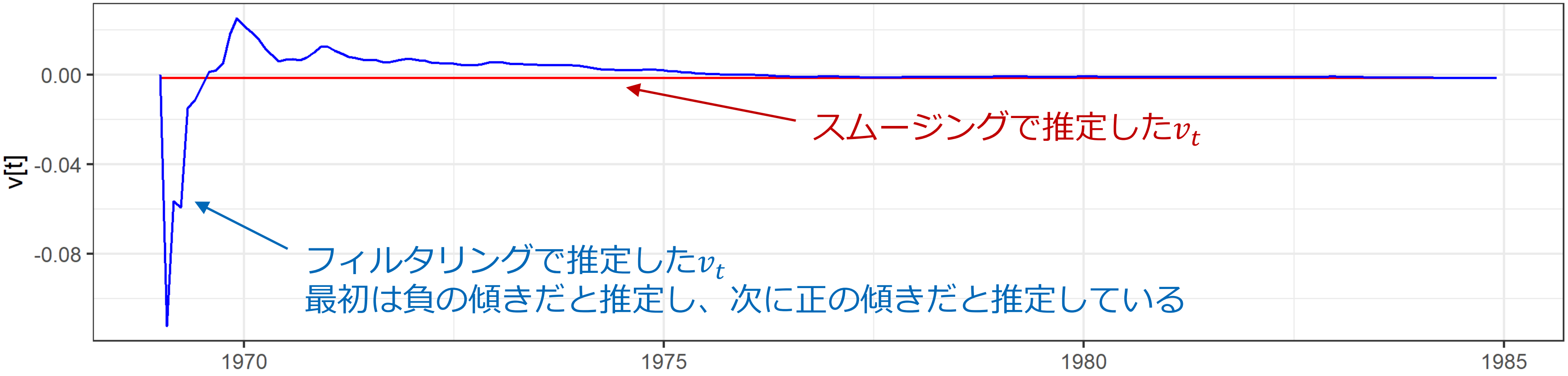
Code 4


y[t]
mu[t]
epsilon[t]
7.75
7.50
7.25
7.00
6.75
1970
1975
1980
1985
$\mu_1 + v\,(t-1)$
0.6
0.3
0.0
-0.3
-0.6

参考：フィルタリングとスムージングのちがい

Code 4





状態空間表現では

$$Y_t = Z_t\alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

$$Y_t = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_t \\ v_t\end{bmatrix} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\alpha_{t+1} = T_t\alpha_t + R_t\eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

$$\begin{bmatrix}\mu_{t+1} \\ v_{t+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_t \\ v_t\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_t \\ 0\end{bmatrix}, \qquad \xi_t \sim N(0, \sigma_\xi^2)$$

Code 5

```
# モデルの定義
oModel <- SSModel(
  dfSeatbelts$gLogDriver ~ -1 + SSMcustom(  # 切片項がないので-1と指定
    Z     = matrix(c(1, 0), nrow=1),    # Z
    T     = matrix(c(1,0,1,1), nrow=2), # T
    R     = matrix(c(1,0,0,1), nrow=2), # R
    Q     = matrix(c(NA,0,0,0), nrow=2), # Q
    P1inf = diag(c(1, 1))
  ),
  H = matrix(NA) # H. NAは推定対象であることを表す
)
# # 線形トレンド・モデルなので、SSMtrend()を使って以下のように略記できる
# oModel2 <- SSModel(
#   dfSeatbelts$gLogDriver ~ SSMtrend(degree=2, Q=list(matrix(NA), matrix(0))),
#   H = matrix(NA)
# )
```

Code 5

```
# # パラメータ推定
agInit <- c(var(dfSeatbelts$gLogDriver) / 2, 0.001)
oFitted   <- fitSSM(
  oModel,
  inits  = log(agInit)
)
cat("sigma^2_epsilon =", as.vector(oFitted$model$H), "¥n")
cat("sigma^2_xi =", as.vector(oFitted$model$Q[1,1,1]), "¥n")
```

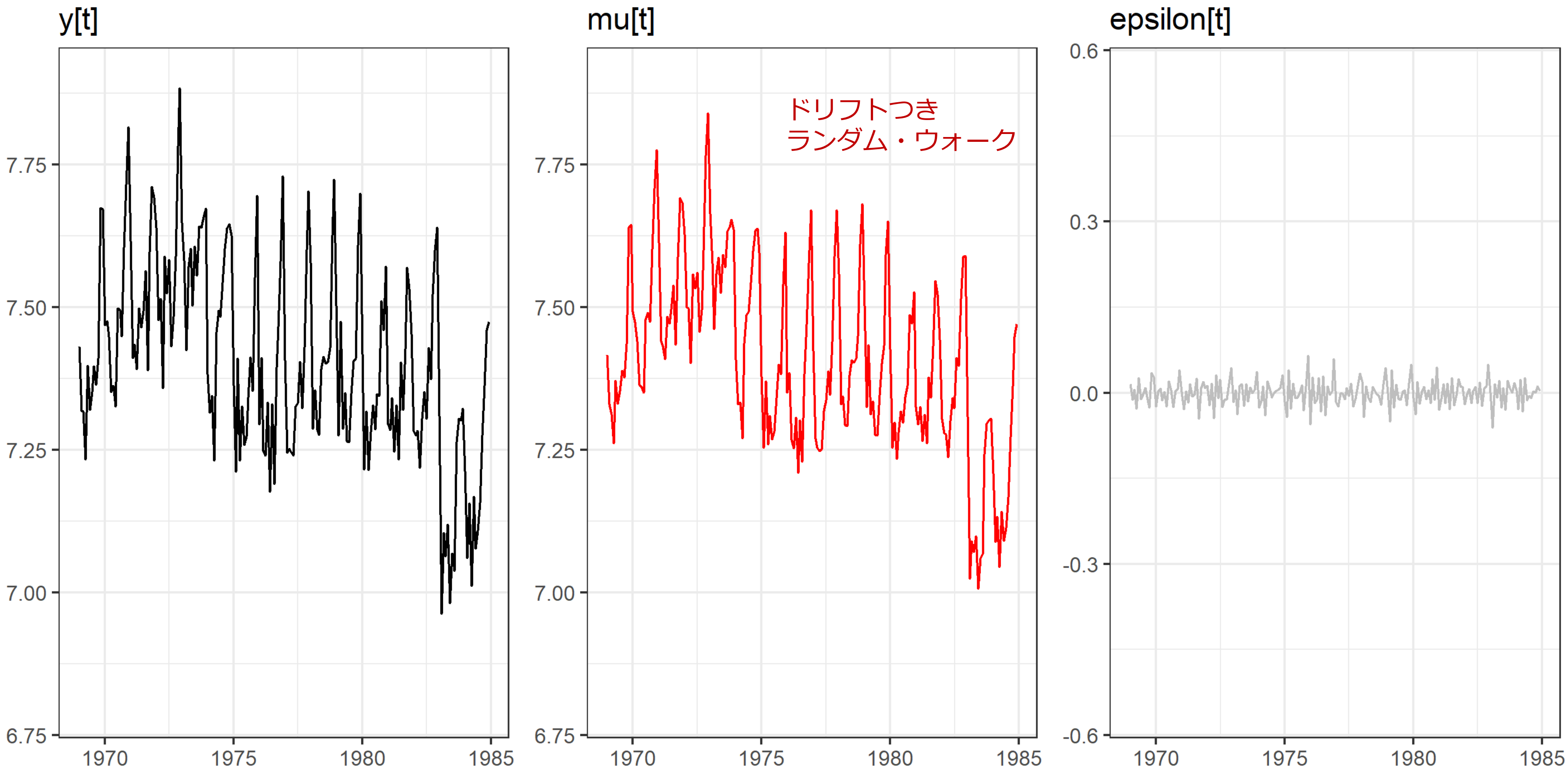
```
sigma^2_epsilon = 0.002116863
sigma^2_xi = 0.01212854
```

σ_ε^2の推定値

σ_ξ^2の推定値

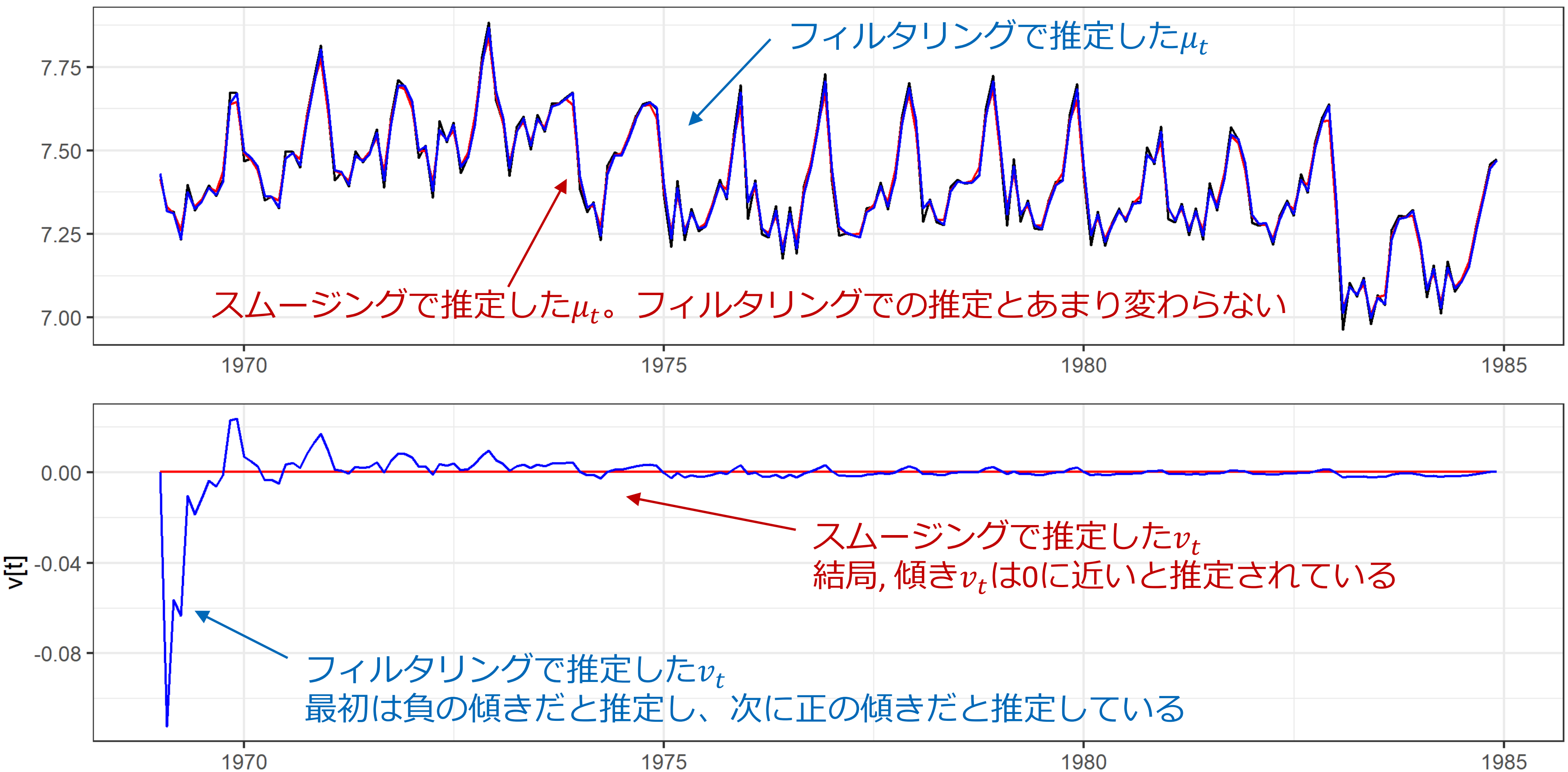
```
# 状態推定(フィルタリング, スムージング)
oEstimated   <- KFS(oFitted$model)
```

Code 5


y[t]
mu[t]
epsilon[t]
ドリフトつき
ランダム・ウォーク
7.75
7.50
7.25
7.00
6.75
0.6
0.3
0.0
-0.3
-0.6
1970
1975
1980
1985

参考：フィルタリングとスムージングのちがい

Code 5



INSIGHT FACTORY

状態空間表現では

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

$$Y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_t \\ v_t \end{bmatrix} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{t+1} \\ v_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_t \\ v_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_t \\ \zeta_t \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \xi_t \\ \zeta_t \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_\xi^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\zeta^2 \end{bmatrix} \right)$$

Code 6

```
# モデルの定義
oModel <- SSModel(
  dfSeatbelts$gLogDriver ~ -1 + SSMcustom(  # 切片項がないので-1と指定
    Z     = matrix(c(1, 0), nrow=1),    # Z
    T     = matrix(c(1,0,1,1), nrow=2), # T
    R     = matrix(c(1,0,0,1), nrow=2), # R
    Q     = matrix(c(NA,0,0,NA), nrow=2), # Q
    P1inf = diag(c(1, 1))
  ),
  H = matrix(NA) # H. NAは推定対象であることを表す
)
# # 線形トレンド・モデルなので、SSMtrend()を使って以下のように略記できる
# oModel2 <- SSModel(
#   dfSeatbelts$gLogDriver ~ SSMtrend(degree=2, Q=list(matrix(NA), matrix(NA))),
#   H = matrix(NA)
# )
```

Code 6

```
# # パラメータ推定
agInit <- c(var(dfSeatbelts$gLogDriver) / 2, 0.001, 0.001)
oFitted   <- fitSSM(
  oModel,
  inits  = log(agInit)
)
cat("sigma^2_epsilon =", as.vector(oFitted$model$H), "¥n")
cat("sigma^2_xi =", as.vector(oFitted$model$Q[1,1,1]), "¥n")
cat("sigma^2_zeta =", as.vector(oFitted$model$Q[2,2,1]), "¥n")
```

```
sigma^2_epsilon = 0.00212052
sigma^2_xi = 0.01212232
sigma^2_zeta = 1.311489e-10
```

σ_ε^2の推定値
σ_ξ^2の推定値
σ_ζ^2の推定値。0に近い。すなわち、状態推定は3-4.とほぼ同じ

```
# 状態推定(フィルタリング, スムージング)
oEstimated   <- KFS(oFitted$model)
```

状態空間表現では…

観察方程式は

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

$$Y_t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mu_t \\ \gamma_{1,t} \\ \gamma_{2,t} \\ \gamma_{3,t} \\ \gamma_{4,t} \\ \gamma_{5,t} \\ \gamma_{6,t} \\ \gamma_{7,t} \\ \gamma_{8,t} \\ \gamma_{9,t} \\ \gamma_{10,t} \\ \gamma_{11,t} \end{bmatrix} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

状態方程式は

$$\alpha_{t+1} = T_t\alpha_t + R_t\eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{t+1} \\ \gamma_{1,t+1} \\ \gamma_{2,t+1} \\ \gamma_{3,t+1} \\ \gamma_{4,t+1} \\ \gamma_{5,t+1} \\ \gamma_{6,t+1} \\ \gamma_{7,t+1} \\ \gamma_{8,t+1} \\ \gamma_{9,t+1} \\ \gamma_{10,t+1} \\ \gamma_{11,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_t \\ \gamma_{1,t} \\ \gamma_{2,t} \\ \gamma_{3,t} \\ \gamma_{4,t} \\ \gamma_{5,t} \\ \gamma_{6,t} \\ \gamma_{7,t} \\ \gamma_{8,t} \\ \gamma_{9,t} \\ \gamma_{10,t} \\ \gamma_{11,t} \end{bmatrix}$$

Code 7

```
# モデルの定義
oModel <- SSModel(
  dfSeatbelts$gLogDriver ~ -1 + SSMcustom(  # 切片項がないので-1と指定
    Z     = matrix(c(
      1,  1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0
    ), nrow=1),
    T     = matrix(c(
      1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,
      0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1,
      0,  1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,
      0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,
      0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,
      0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,
      0,  0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,
      0,  0,  0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0,
      0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,
      0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,
      0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,
      0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  1,  0
    ), byrow = T, nrow = 12),
    R     = matrix(c(1, rep(0, 11)),  nrow = 12),
    Q     = 0,
    P1inf = diag(rep(1, 12))
  ),
  H = matrix(NA) # H. NAは推定対象であることを表す
)
```

Code 7

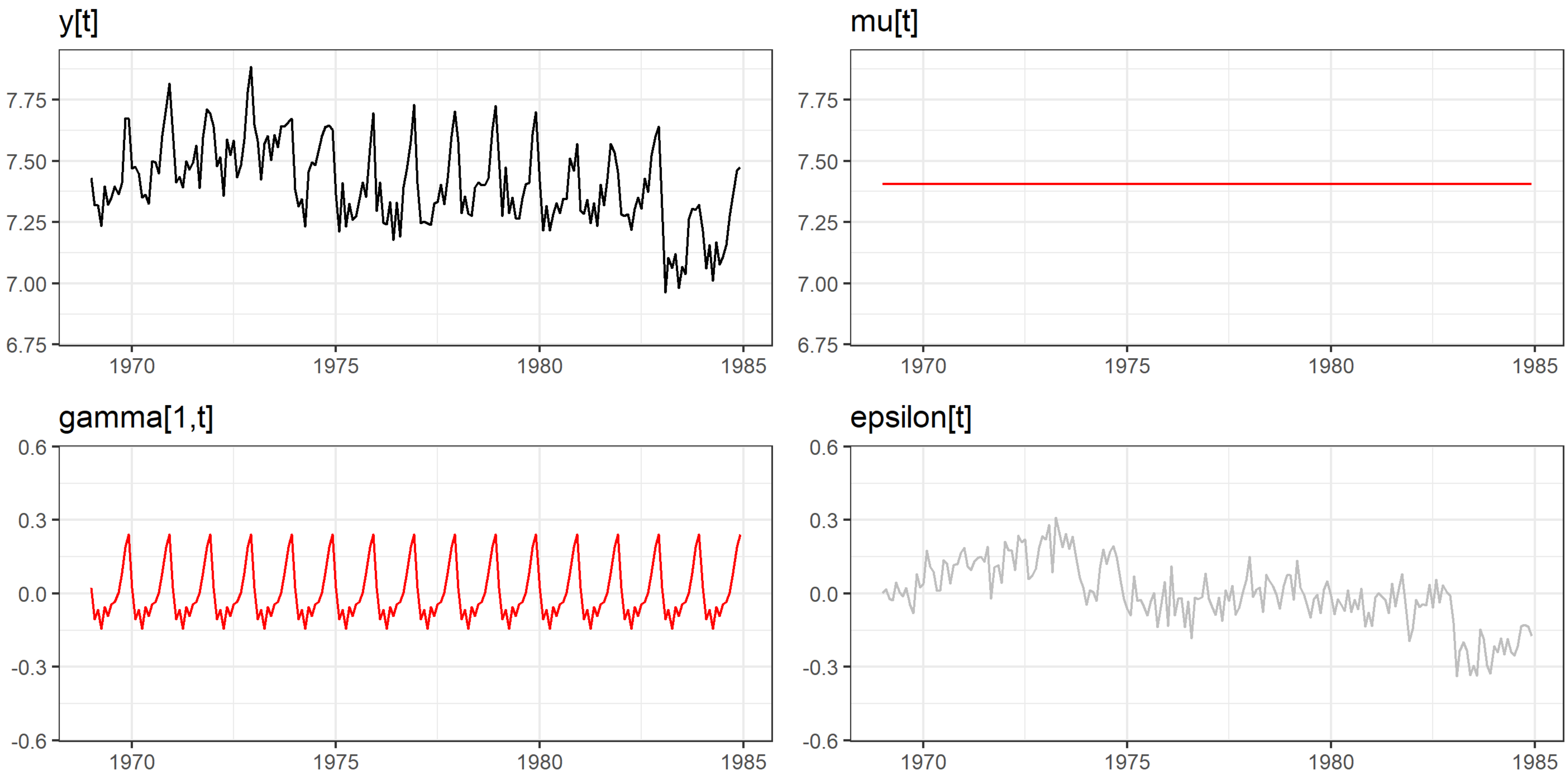
```
# SSMtrend()とSSMSeasonal()を使って以下のように略記できる
# oModel2 <- SSModel(
#   dfSeatbelts$gLogDriver ~ SSMtrend(degree=1, Q=list(matrix(0))) +
#                            SSMseasonal(12, sea.type="dummy"),
#   H = matrix(NA)
# )

# パラメータ推定
agInit <- c(var(dfSeatbelts$gLogDriver) / 2, 0.001, 0.001)
oFitted   <- fitSSM(
  oModel,
  inits   = log(agInit)
)
cat("sigma^2_epsilon =", as.vector(oFitted$model$H), "¥n")
```

```
sigma^2_epsilon = 0.01758663
```

σ_ε^2の推定値

```
# 状態推定(フィルタリング, スムージング)
oEstimated   <- KFS(oFitted$model)
```

Code 7


y[t]
7.75
7.50
7.25
7.00
6.75
1970
1975
1980
1985
mu[t]
7.75
7.50
7.25
7.00
6.75
1970
1975
1980
1985
gamma[1,t]
0.6
0.3
0.0
-0.3
-0.6
1970
1975
1980
1985
epsilon[t]
0.6
0.3
0.0
-0.3
-0.6
1970
1975
1980
1985

状態空間表現では…

観察方程式は

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

$$Y_t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mu_t \\ \gamma_{1,t} \\ \gamma_{2,t} \\ \gamma_{3,t} \\ \gamma_{4,t} \\ \gamma_{5,t} \\ \gamma_{6,t} \\ \gamma_{7,t} \\ \gamma_{8,t} \\ \gamma_{9,t} \\ \gamma_{10,t} \\ \gamma_{11,t} \end{bmatrix} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

3-6. と同じ

状態方程式は

$$\alpha_{t+1} = T_t\alpha_t + R_t\eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{t+1} \\ \gamma_{1,t+1} \\ \gamma_{2,t+1} \\ \gamma_{3,t+1} \\ \gamma_{4,t+1} \\ \gamma_{5,t+1} \\ \gamma_{6,t+1} \\ \gamma_{7,t+1} \\ \gamma_{8,t+1} \\ \gamma_{9,t+1} \\ \gamma_{10,t+1} \\ \gamma_{11,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_t \\ \gamma_{1,t} \\ \gamma_{2,t} \\ \gamma_{3,t} \\ \gamma_{4,t} \\ \gamma_{5,t} \\ \gamma_{6,t} \\ \gamma_{7,t} \\ \gamma_{8,t} \\ \gamma_{9,t} \\ \gamma_{10,t} \\ \gamma_{11,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xi_t$$

$$\xi_t \sim N(0, \sigma_\xi^2)$$

Code 8

```
# モデルの定義
 oModel <- SSModel(
   dfSeatbelts$gLogDriver ~ -1 + SSMcustom(  # 切片項がないので-1と指定
     Z     = matrix(c(
       1,  1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0
     ), nrow=1),
     T     = matrix(c(
       1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,
       0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1,
       0,  1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,
       0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,
       0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,
       0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,
       0,  0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,
       0,  0,  0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0,
       0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,
       0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,
       0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,
       0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  1,  0
     ), byrow = T, nrow = 12),
     R     = matrix(c(1, rep(0, 11)),  nrow = 12),
     Q     = NA,
     P1inf = diag(rep(1, 12))
   ),
   H = matrix(NA) # H. NAは推定対象であることを表す
 )
```

Code 8

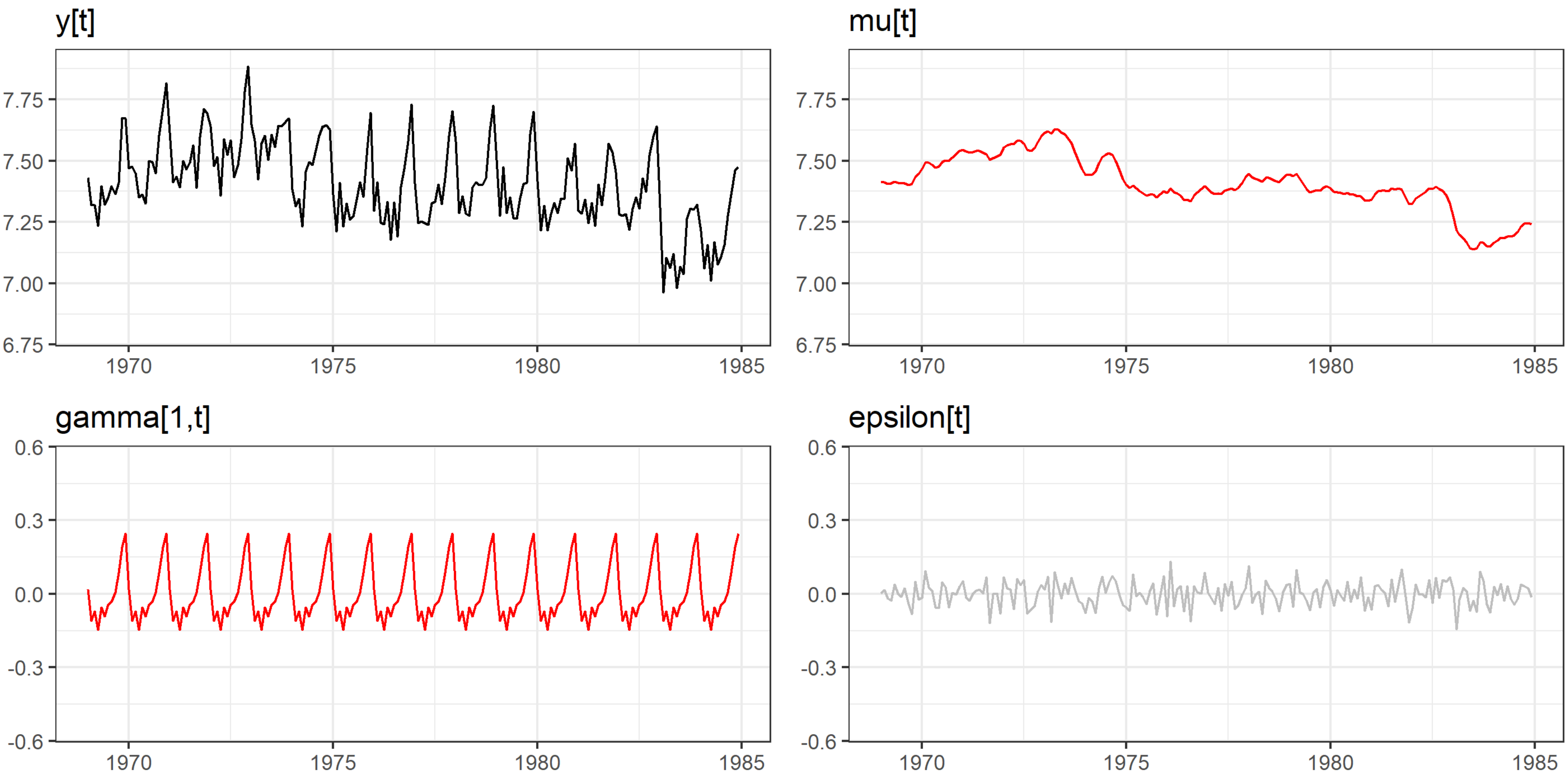
```
# # SSMtrend()とSSMSeasonal()を使って以下のように略記できる
# oModel <- SSModel(
#   dfSeatbelts$gLogDriver ~ SSMtrend(degree=1, Q=list(matrix(NA))) +
#                            SSMseasonal(12, sea.type="dummy"),
#   H = matrix(NA)
# )

# パラメータ推定
agInit <- c(var(dfSeatbelts$gLogDriver) / 2, 0.001)
oFitted    <- fitSSM(
  oModel,
  inits   = log(agInit)
)
cat("sigma^2_epsilon =", as.vector(oFitted$model$H), "¥n")
cat("sigma^2_xi =", as.vector(oFitted$model$Q[1,1,1]), "¥n")
```

```
sigma^2_epsilon = 0.003513563
sigma^2_xi = 0.000946002
```

σ_ε^2の推定値
σ_ξ^2の推定値

```
# 状態推定(フィルタリング, スムージング)
oEstimated    <- KFS(oFitted$model)
```

Code 8


y[t]
mu[t]
gamma[1,t]
epsilon[t]
7.75
7.50
7.25
7.00
6.75
0.6
0.3
0.0
-0.3
-0.6
1970
1975
1980
1985

状態空間表現では…

観察方程式は

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

$$Y_t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mu_t \\ \gamma_{1,t} \\ \gamma_{2,t} \\ \gamma_{3,t} \\ \gamma_{4,t} \\ \gamma_{5,t} \\ \gamma_{6,t} \\ \gamma_{7,t} \\ \gamma_{8,t} \\ \gamma_{9,t} \\ \gamma_{10,t} \\ \gamma_{11,t} \end{bmatrix} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

3-6. と同じ

状態方程式は

$$\alpha_{t+1} = T_t\alpha_t + R_t\eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{t+1} \\ \gamma_{1,t+1} \\ \gamma_{2,t+1} \\ \gamma_{3,t+1} \\ \gamma_{4,t+1} \\ \gamma_{5,t+1} \\ \gamma_{6,t+1} \\ \gamma_{7,t+1} \\ \gamma_{8,t+1} \\ \gamma_{9,t+1} \\ \gamma_{10,t+1} \\ \gamma_{11,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{t} \\ \gamma_{1,t} \\ \gamma_{2,t} \\ \gamma_{3,t} \\ \gamma_{4,t} \\ \gamma_{5,t} \\ \gamma_{6,t} \\ \gamma_{7,t} \\ \gamma_{8,t} \\ \gamma_{9,t} \\ \gamma_{10,t} \\ \gamma_{11,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_t \\ \omega_t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \xi_t \\ \omega_t \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_\xi^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\omega^2 \end{bmatrix} \right)$$

Code 9

```
# モデルの定義
 oModel <- SSModel(
   dfSeatbelts$gLogDriver ~ -1 + SSMcustom(  # 切片項がないので-1と指定
     Z     = matrix(c(
       1,  1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0
     ), nrow=1),
     T     = matrix(c(
       1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,
       0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1,
       0,  1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,
       0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,
       0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,
       0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,
       0,  0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,
       0,  0,  0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0,
       0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,
       0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,
       0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,
       0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  1,  0
     ), byrow = T, nrow = 12),
     R     = matrix(c(1, rep(0, 11), 0, 1, rep(0, 10)),  nrow = 12),
     Q     = matrix(c(NA, 0, 0, NA), nrow=2),
     P1inf = diag(rep(1, 12))
   ),
   H = matrix(NA) # H. NAは推定対象であることを表す
 )
```

Code 9

```
# # SSMtrend()とSSMSeasonal()を使って以下のように略記できる
 # oModel2 <- SSModel(
 #   dfSeatbelts$gLogDriver ~ SSMtrend(degree=1, Q=list(matrix(NA))) +
 #                            SSMseasonal(
 #                              12, sea.type="dummy",
 #                              Q = matrix(NA), n = nrow(dfSeatbelts)
 #                            ),
 #   H = matrix(NA)
 # )
 # ## View(oModel2)

 # パラメータ推定
 agInit <- c(var(dfSeatbelts$gLogDriver)/2, 0.001, 0.001)
 oFitted   <- fitSSM(
   oModel,
   inits   = log(agInit)
 )
 cat("sigma^2_epsilon =", as.vector(oFitted$model$H), "¥n")
 cat("sigma^2_xi =", as.vector(oFitted$model$Q[1,1,1]), "¥n")
 cat("sigma^2_omega =", as.vector(oFitted$model$Q[2,2,1]), "¥n")
```

```
sigma^2_epsilon = 0.003514111
sigma^2_xi = 0.0009456102
sigma^2_omega = 3.646278e-11
```

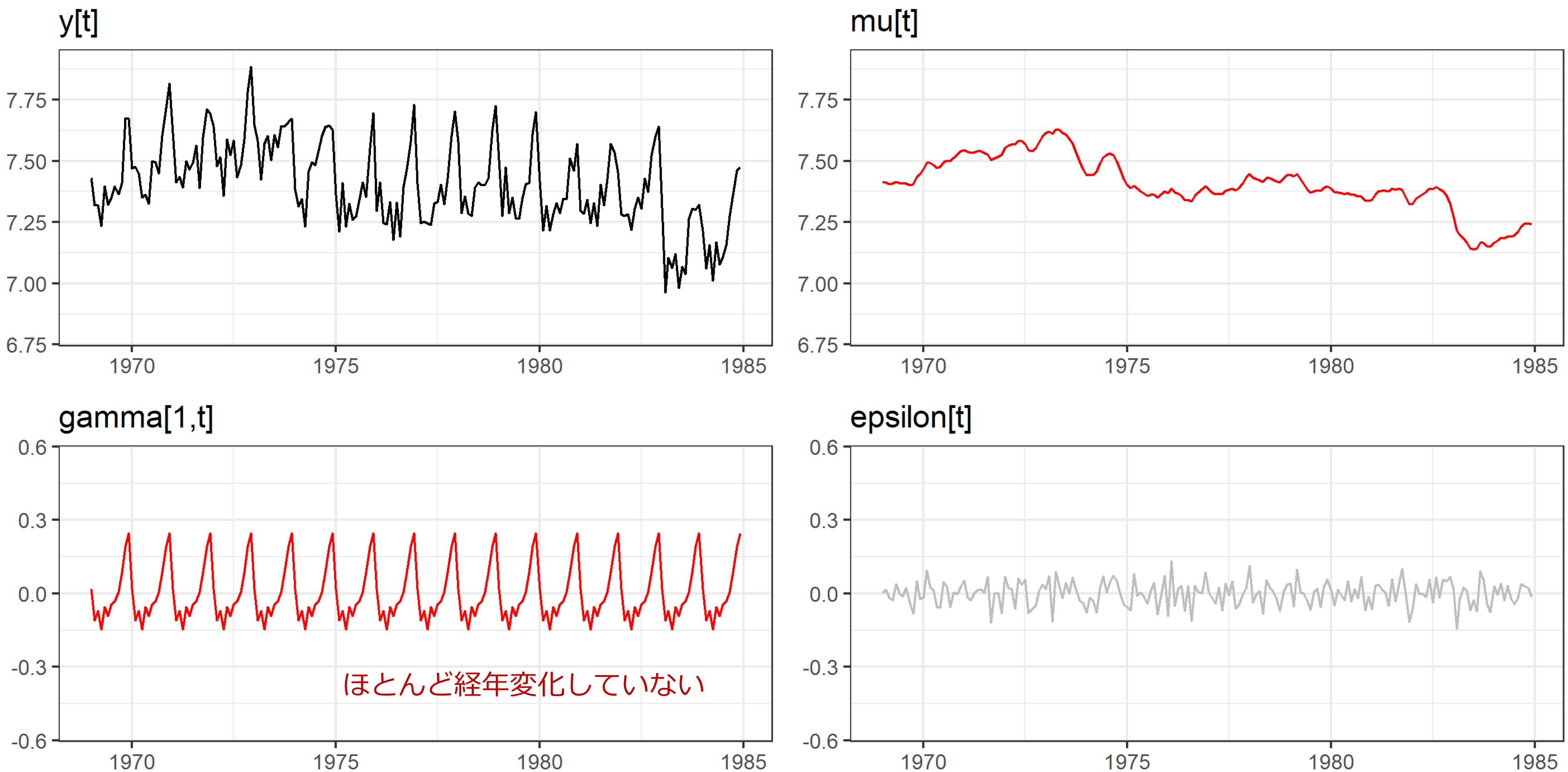
σ_ε^2の推定値

σ_ξ^2の推定値

σ_ω^2の推定値。季節効果はほとんど経年変化しない

```
# 状態推定(フィルタリング, スムージング)
oEstimated   <- KFS(oFitted$model)
```

Code 9


y[t]
mu[t]
gamma[1,t]
epsilon[t]
7.75
7.50
7.25
7.00
6.75
0.6
0.3
0.0
-0.3
-0.6
1970
1975
1980
1985
ほとんど経年変化していない

状態空間表現では…

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

$$Y_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ Y_t - Y_{t-1} \\ \theta \varepsilon_t \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

$$\begin{bmatrix} Y_t \\ Y_{t+1} - Y_t \\ \theta \varepsilon_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \phi & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ Y_t - Y_{t-1} \\ \theta \varepsilon_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \theta \end{bmatrix} \varepsilon_{t+1}, \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

3つめの状態変数は時間的な構造を持っていない

Code 10

```
# 参考: forecastパッケージ
 library(forecast)
 oArima <- Arima(dfSeatbelts$gLogDriver, order = c(1, 1, 1))
 print(oArima)
```

```
Series: dfSeatbelts$gLogDriver
ARIMA(1,1,1)

Coefficients:
         ar1      ma1
      0.6456  -0.9627
s.e.  0.0649   0.0223

sigma^2 estimated as 0.01402:  log likelihood=136.89
AIC=-267.78   AICc=-267.65   BIC=-258.02
```

Code 10

```
# 初期モデルの定義
 # SSMarima()を使って以下のように略記できる. ひとまずARMAパラメータは0と置く
 oModel <- SSModel(
   dfSeatbelts$gLogDriver ~ SSMarima(
     ar = 0,  # ARパラメータ
     ma = 0,  # MAパラメータ
     d = 1,   # 差分を1回とる
     Q = NA   # Q行列は推定対象
   ),
   H = 0   # H行列は0
 )
 # fitSSMはデフォルトではT行列とR行列を推定できないので、
 # 「パラメータを与えるとモデルを返す」関数を定義する
 sub_update <- function(par, model) {
   # par: 順に{状態撹乱項の分散の対数, ARパラメータ, MAパラメータ}
   # model: 現在のモデル

   ## print(par)

   # 与えられた引数に基づき, T行列, R行列, Q行列をつくる
   tmp <- SSMarima(
     ar = par[2], ma = par[3], d = 1, Q = exp(par[1])
   )
   # モデルを更新する
   model["T", states = "arima"] <- tmp$T
   model["R", states = "arima"] <- tmp$R
   model["Q", states = "arima"] <- tmp$Q
   model["P1", states = "arima"] <- tmp$P1
   return(model)
 }
```

Code 10

```
# パラメータ推定
oFitted   <- fitSSM(
  oModel,
  inits  = c(log(var(dfSeatbelts$gLogDriver)/2), 0, 0),
  # 「パラメータを与えるとモデルを返す」関数を指定する
  updatefn = sub_update,
  # 状態撹乱項の分散は、exp(-10)からexp(10)の間で推定する
  # ARパラメータは, -0.95から+0.95のあいだで推定する
  # MAパラメータは, -5から5のあいだで推定する
  lower  = c(-10, -0.95, -5),
  upper  = c(+10, +0.95, +5),
  method = "L-BFGS-B"
)
cat("sigma^2_epsilon =", as.vector(oFitted$model$Q), "¥n")
cat("phi =", as.vector(oFitted$model$T[2,2,1]), "¥n")
cat("theta =", as.vector(oFitted$model$R[3,1,1]), "¥n")
```

```
sigma^2_epsilon = 0.01285857
phi = 0.6456212
theta = -1.038809
```

forecast::Arima()での推定結果と、ちょっとちがいますね

状態空間表現では…

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

$$Y_t = \begin{bmatrix} X_t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \mu \end{bmatrix} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \mu \end{bmatrix}$$

注意！
運転者死傷数(対数)は単位根をもっている。
従って、単回帰モデル $Y_t = \mu + \beta X_t + \varepsilon_t$ のOLS推定は適切でない。
当然ながら、この状態空間モデルも適切でない(ε_t は正規ホワイトノイズではない)。

Code 11

```
# 参考: 単回帰
 print(summary(lm(gLogDriver ~ gLogPetrol, data=dfSeatbelts)))
```

```
Call:
lm(formula = gLogDriver ~ gLogPetrol, data = dfSeatbelts)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max 
-0.37612 -0.09896 -0.01594  0.09077  0.36594 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)  5.87873    0.20889  28.142  < 2e-16 ***
gLogPetrol  -0.67166    0.09173  -7.322 6.74e-12 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.1517 on 190 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2201,	Adjusted R-squared:  0.216 
F-statistic: 53.61 on 1 and 190 DF,  p-value: 6.742e-12
```

Code 11

```
mgZ <- array(dim = c(1,2,nrow(dfSeatbelts)))
mgZ[1,1,] <- as.vector(dfSeatbelts$gLogPetrol)
mgZ[1,2,] <- 1
oModel <- SSModel(
  dfSeatbelts$gLogDriver ~ -1 + SSMcustom(
    Z     = mgZ,
    T     = matrix(c(1,0,0,1), nrow = 2),
    R     = matrix(c(1,0,0,1), nrow = 2),
    Q     = matrix(c(0, 0, 0, 0), nrow = 2),
    P1    = matrix(c(0, 0, 0, 0), nrow = 2),
    P1inf = matrix(c(1, 0, 0, 1), nrow = 2)
  ),
  H = matrix(NA)
)
# # 次のように略記できる
# oModel2 <- SSModel(
#   dfSeatbelts$gLogDriver ~ SSMtrend(degree=1, Q=list(matrix(0))) +
#     SSMregression(~ -1 + dfSeatbelts$gLogPetrol, Q=matrix(0)),
#   H=matrix(NA)
# )
```

Code 11

```
gInit <- c(var(dfSeatbelts$gLogDriver)/2)
oFitted   <- fitSSM(
  oModel,
  inits  = log(gInit),
  method = "BFGS"
)
cat("sigma^2_epsilon =", as.vector(oFitted$model$H), "¥n")
```

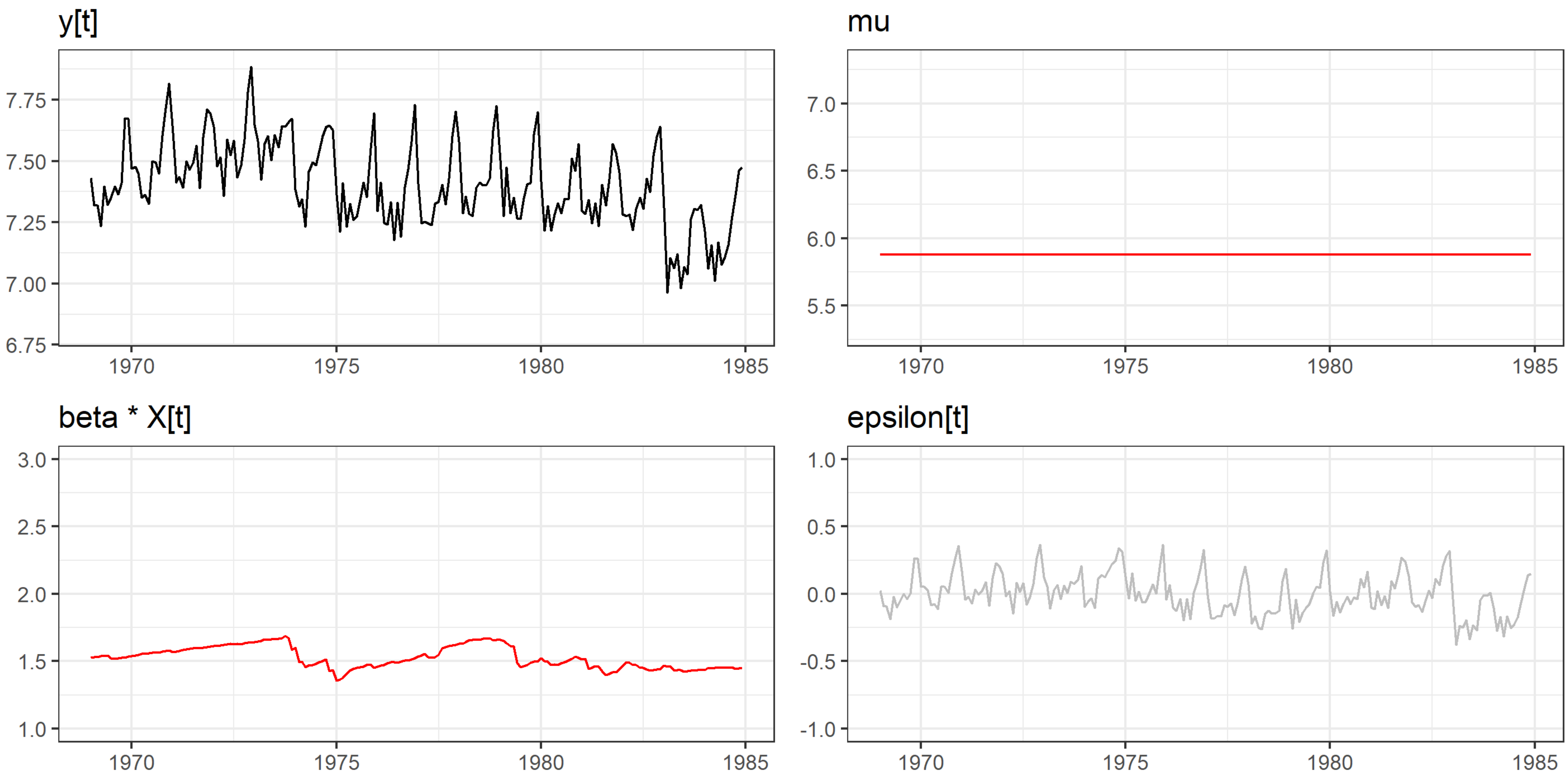
```
sigma^2_epsilon = 0.02301349
```

```
oEstimated <- KFS(oFitted$model)
cat("beta =", as.vector(oEstimated$alphahat[1,1]), "¥n")
cat("mu =", as.vector(oEstimated$alphahat[1,2]), "¥n")
```

```
beta = -0.6716644
mu = 5.878731
```

lm()によるOLS回帰と全く同じ推定値が得られる

Code 11


y[t]
7.75
7.50
7.25
7.00
6.75
1970
1975
1980
1985
mu
7.0
6.5
6.0
5.5
1970
1975
1980
1985
beta * X[t]
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
1970
1975
1980
1985
epsilon[t]
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
1970
1975
1980
1985

状態空間表現では

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

$$Y_t = \begin{bmatrix} X_t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \mu_t \end{bmatrix} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \mu_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \mu_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_t \end{bmatrix}, \qquad \xi_t \sim N(0, \sigma_\xi^2)$$

Code 12

```
mgZ <- array(dim = c(1,2,nrow(dfSeatbelts)))
mgZ[1,1,] <- as.vector(dfSeatbelts$gLogPetrol)
mgZ[1,2,] <- 1
oModel <- SSModel(
  dfSeatbelts$gLogDriver ~ -1 + SSMcustom(
    Z     = mgZ,
    T     = matrix(c(1,0,0,1), nrow = 2),
    R     = matrix(c(1,0,0,1), nrow = 2),
    Q     = matrix(c(0, 0, 0, NA), nrow = 2),
    P1    = matrix(c(0, 0, 0, 0), nrow = 2),
    P1inf = matrix(c(1, 0, 0, 1), nrow = 2)
  ),
  H = matrix(NA)
)
# # 次のように略記できる
# oModel2 <- SSModel(
#   dfSeatbelts$gLogDriver ~ SSMtrend(degree=1, Q=list(matrix(NA))) +
#     SSMregression(~ -1 + dfSeatbelts$gLogPetrol, Q=matrix(0)),
#   H=matrix(NA)
# )
```

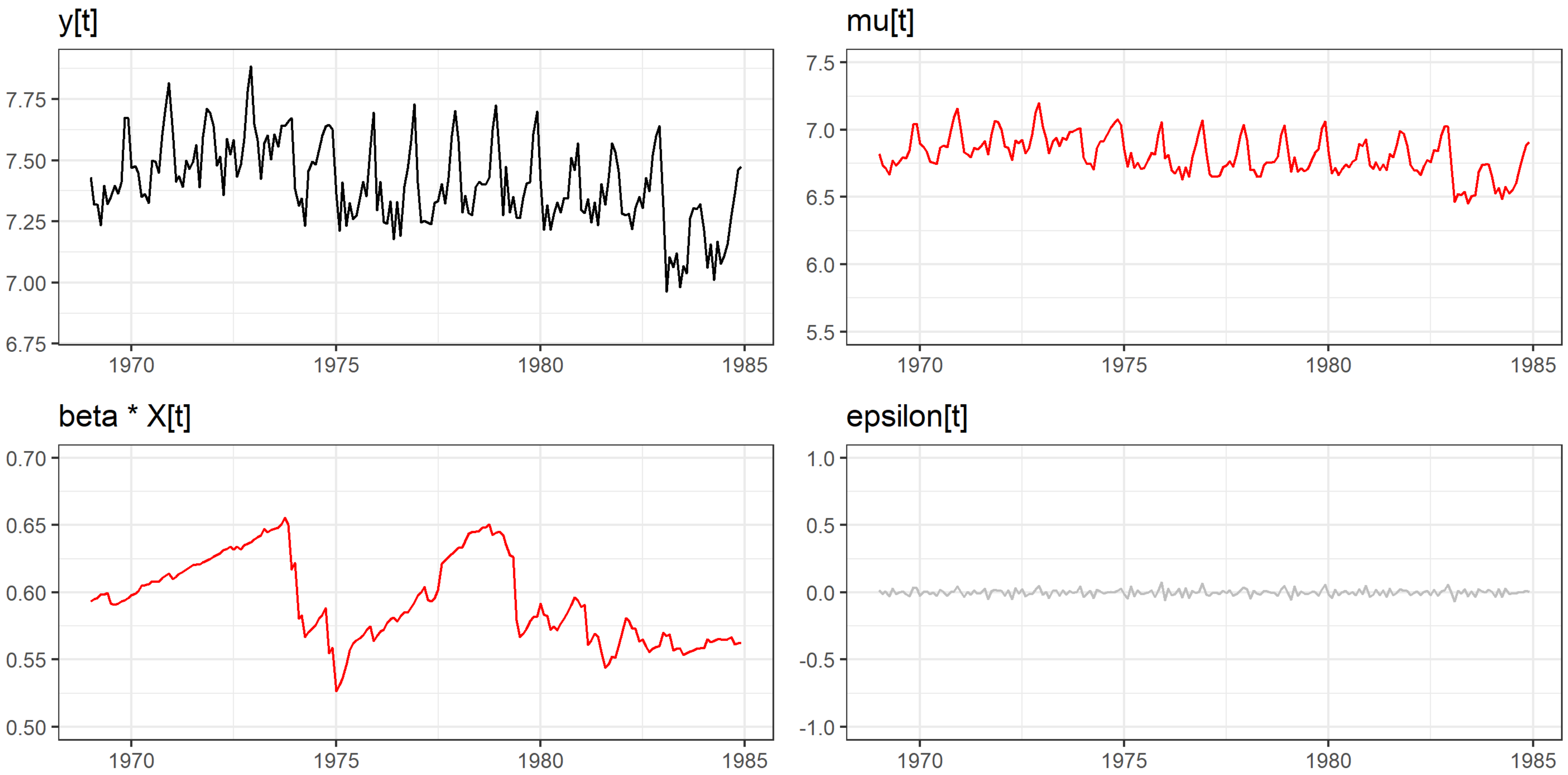
Code 12

```
agInit <- c(var(dfSeatbelts$gLogDriver)/2, 0.001)
oFitted   <- fitSSM(
  oModel,
  inits  = log(agInit),
)
cat("sigma^2_epsilon =", as.vector(oFitted$model$H), "¥n")
cat("sigma^2_xi      =", as.vector(oFitted$model$Q[2,2,1]), "¥n")
```

```
sigma^2_epsilon = 0.002348964
sigma^2_xi      = 0.01166641
```

```
oEstimated <- KFS(oFitted$model)
```

Code 12


y[t]
7.75
7.50
7.25
7.00
6.75
1970
1975
1980
1985
mu[t]
7.5
7.0
6.5
6.0
5.5
1970
1975
1980
1985
beta * X[t]
0.70
0.65
0.60
0.55
0.50
1970
1975
1980
1985
epsilon[t]
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
1970
1975
1980
1985

状態空間表現では

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, H_t)$$

$$Y_t = \begin{bmatrix} X_t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_t \\ \mu_t \end{bmatrix} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0, Q_t)$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{t+1} \\ \mu_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_t \\ \mu_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \tau_t \\ \xi_t \end{bmatrix} \sim WN\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_\tau^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\xi^2 \end{bmatrix} \right)$$

Code 13

```
mgZ <- array(dim = c(1,2,nrow(dfSeatbelts)))
mgZ[1,1,] <- as.vector(dfSeatbelts$gLogPetrol)
mgZ[1,2,] <- 1
oModel <- SSModel(
  dfSeatbelts$gLogDriver ~ -1 + SSMcustom(
    Z     = mgZ,
    T     = matrix(c(1,0,0,1), nrow = 2),
    R     = matrix(c(1,0,0,1), nrow = 2),
    Q     = matrix(c(NA, 0, 0, NA), nrow = 2),
    P1    = matrix(c(0, 0, 0, 0), nrow = 2),
    P1inf = matrix(c(1, 0, 0, 1), nrow = 2)
  ),
  H = matrix(NA)
)
# 次のように略記できる
# oModel2 <- SSModel(
#   dfSeatbelts$gLogDriver ~ SSMtrend(degree=1, Q=list(matrix(NA))) +
#     SSMregression(~ -1 + dfSeatbelts$gLogPetrol, Q=matrix(NA)),
#   H=matrix(NA)
# )
```

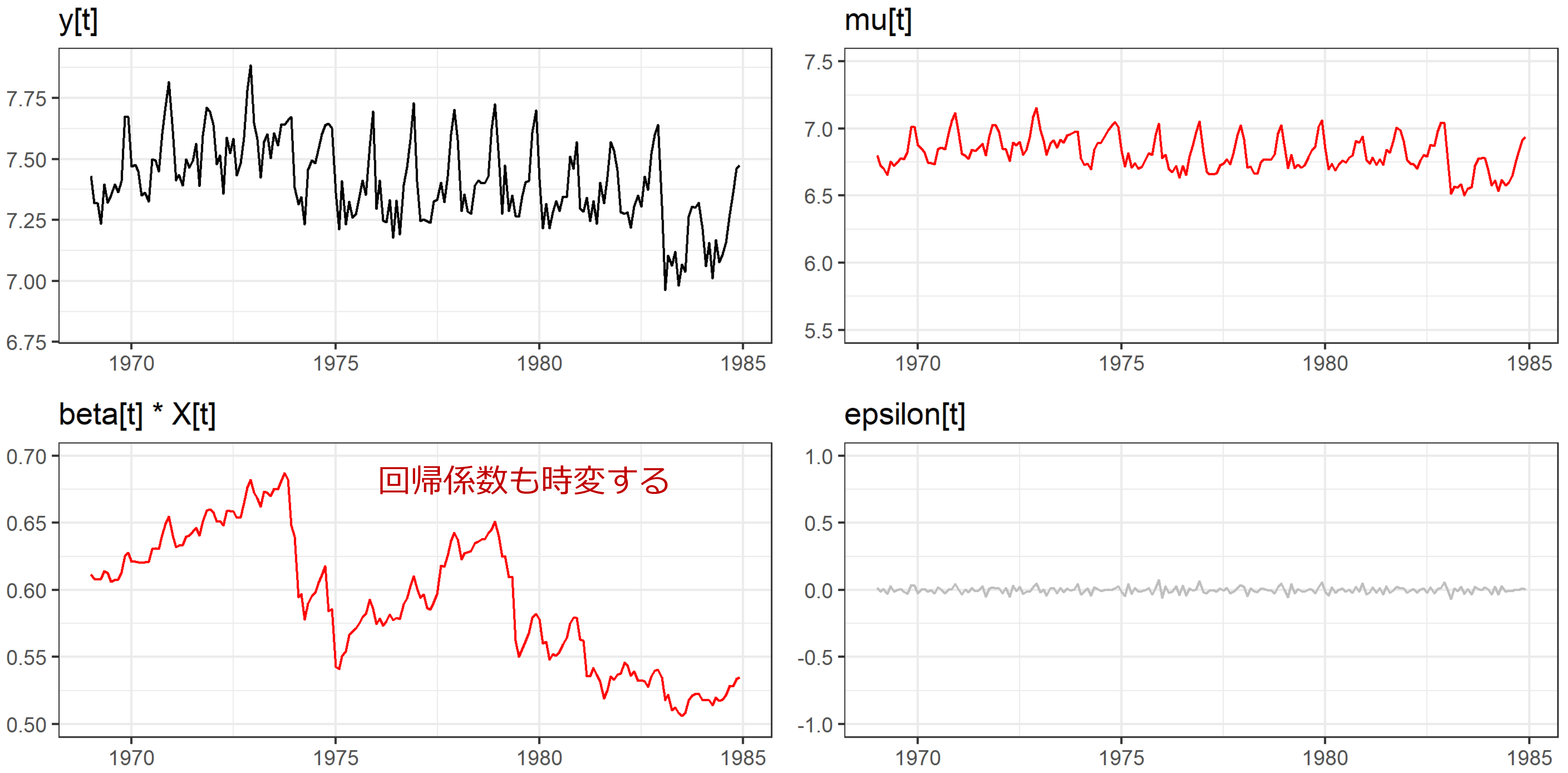
Code 13

```
agInit <- c(var(dfSeatbelts$gLogDriver)/2, 0.001)
oFitted   <- fitSSM(
  oModel,
  inits  = log(agInit),
)
cat("sigma^2_epsilon =", as.vector(oFitted$model$H), "¥n")
cat("sigma^2_xi      =", as.vector(oFitted$model$Q[2,2,1]), "¥n")
cat("sigma^2_tau      =", as.vector(oFitted$model$Q[1,1,1]), "¥n")
```

```
sigma^2_epsilon = 0.002356589
sigma^2_xi      = 0.01097267
sigma^2_tau      = 0.0001308724
```

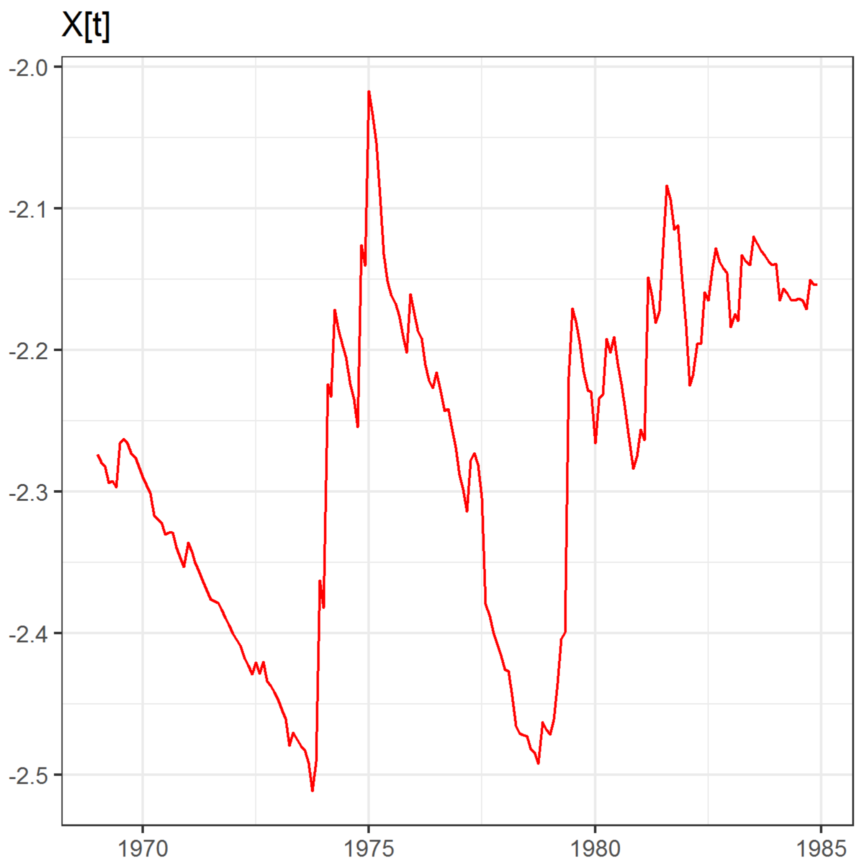
```
oEstimated <- KFS(oFitted$model)
```

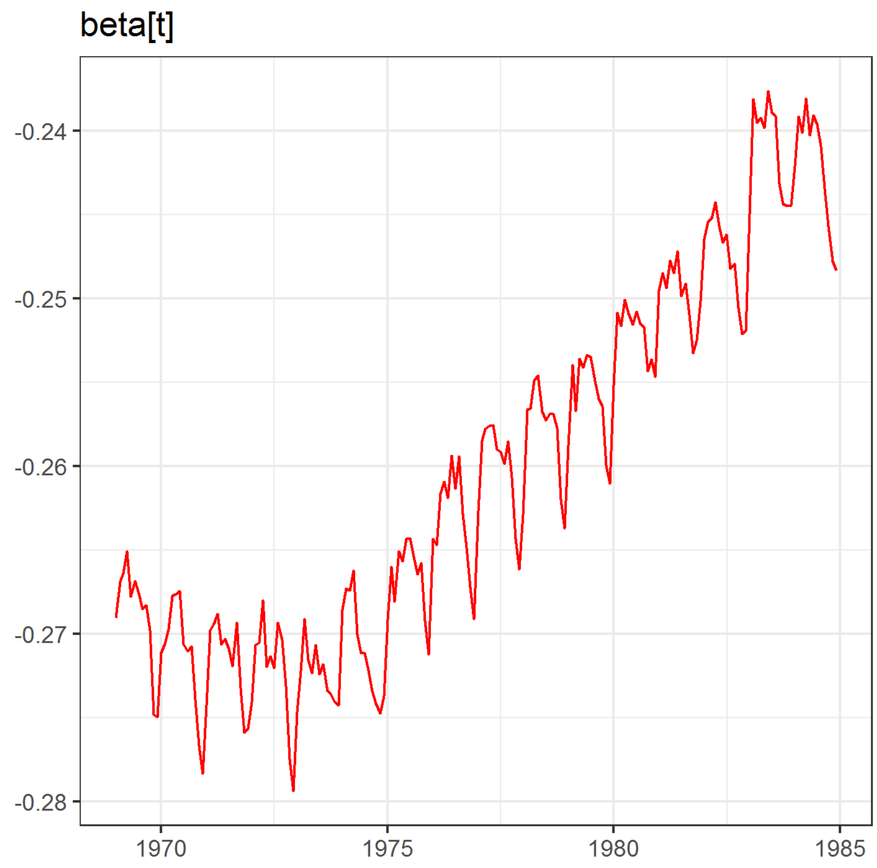
Code 13



y[t]
7.75
7.50
7.25
7.00
6.75
1970
1975
1980
1985
mu[t]
7.5
7.0
6.5
6.0
5.5
1970
1975
1980
1985
beta[t] * X[t]
0.70
0.65
0.60
0.55
0.50
1970
1975
1980
1985
回帰係数も時変する
epsilon[t]
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
1970
1975
1980
1985

Code 13





回帰係数の変動が、季節効果を反映してしまっている…

4. 状態空間モデルの診断と評価

4. 状態空間モデルの診断と評価

■ モデルの診断

- 標準化予測誤差
- 補助残差

■ モデルの評価

- AIC (赤池情報量規準)

4-1. 標準化予測誤差

カルマンフィルタによるパラメータ推定は、フィルタリングにおける一期先予測誤差

$$v_t = y_t - Z_t a_{t|t-1}$$

が、互いに独立に$N(0, F_t)$ に従うことを前提としている。この前提のチェックは非常に重要である。

そこで、個々のv_tについて、その分散を1に調整した

$$e_t = v_t / \sqrt{F_t}$$

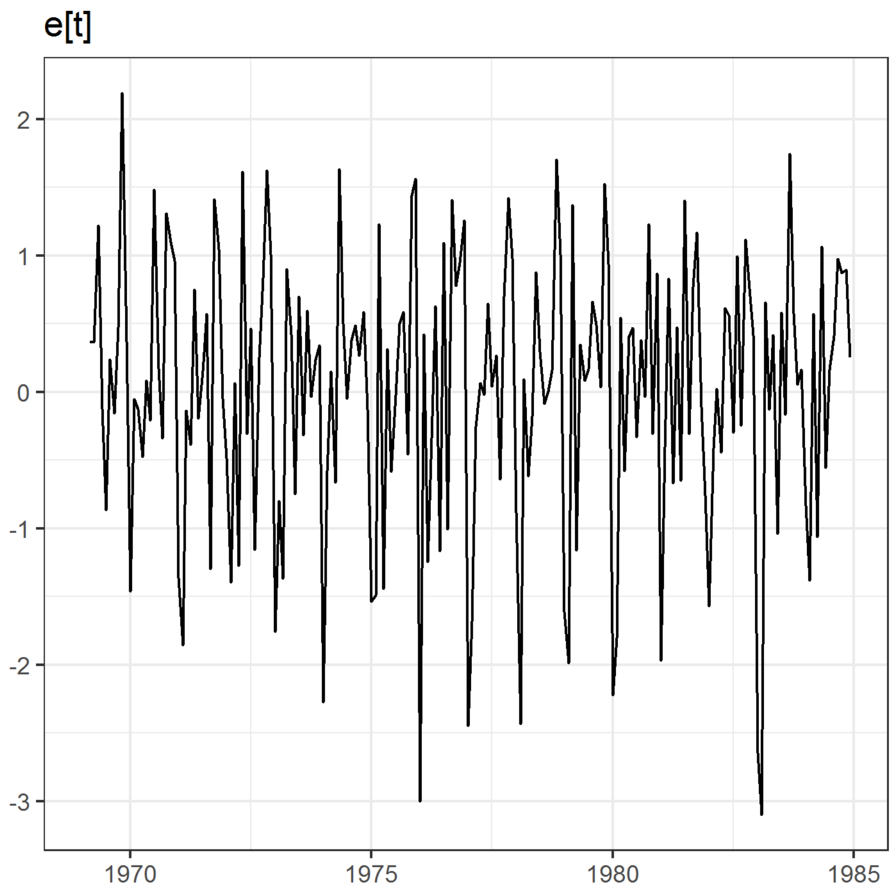
を求め、その性質を調べる。これを**標準化予測誤差**と呼ぶ。

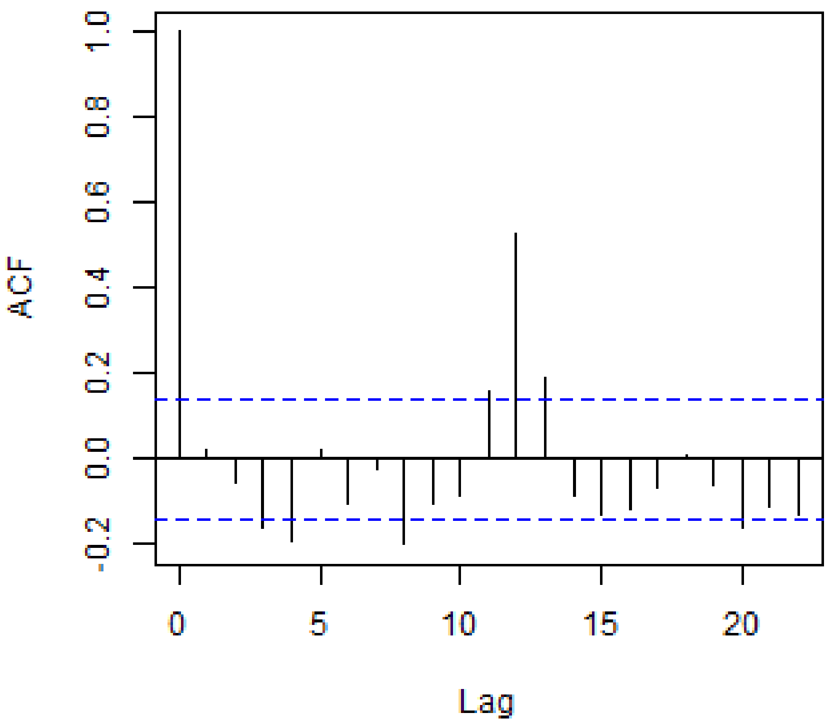
標準化予測誤差は、独立性、均一分散性、正規性を満たしていることが求められる。

- さまざまな診断手法がある (CK pp.94-99)

例) 3-11. 説明変数のあるローカル・レベル・モデル (確率的レベル, 確定的係数)

Code 12





季節効果が残っている…

4-2. 補助残差 (CK pp.99-100)

- スムージングによって得た観察撹乱項の推定値 $\hat{\varepsilon}_t$から

$$\hat{\varepsilon}_t/\sqrt{Var(\hat{\varepsilon}_t)}$$

  を求めて観察する

  → **外れ値**を発見できる

- スムージングによって得た状態撹乱項の推定値 $\hat{\eta}_t$ から

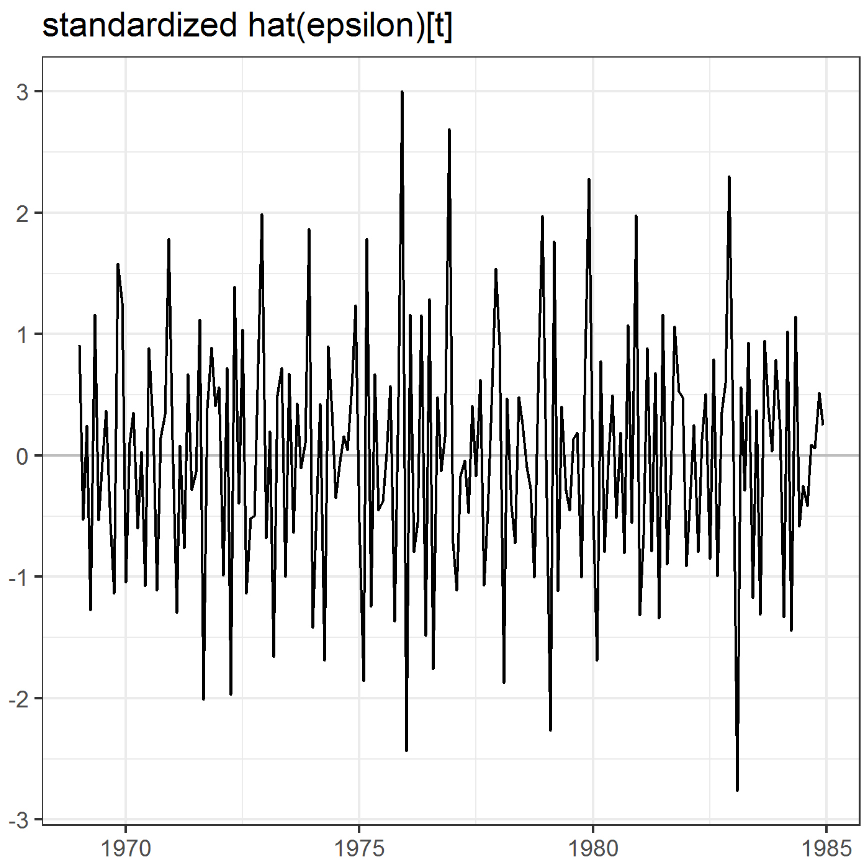
$$\hat{\eta}_t/\sqrt{Var(\hat{\eta}_t)}$$

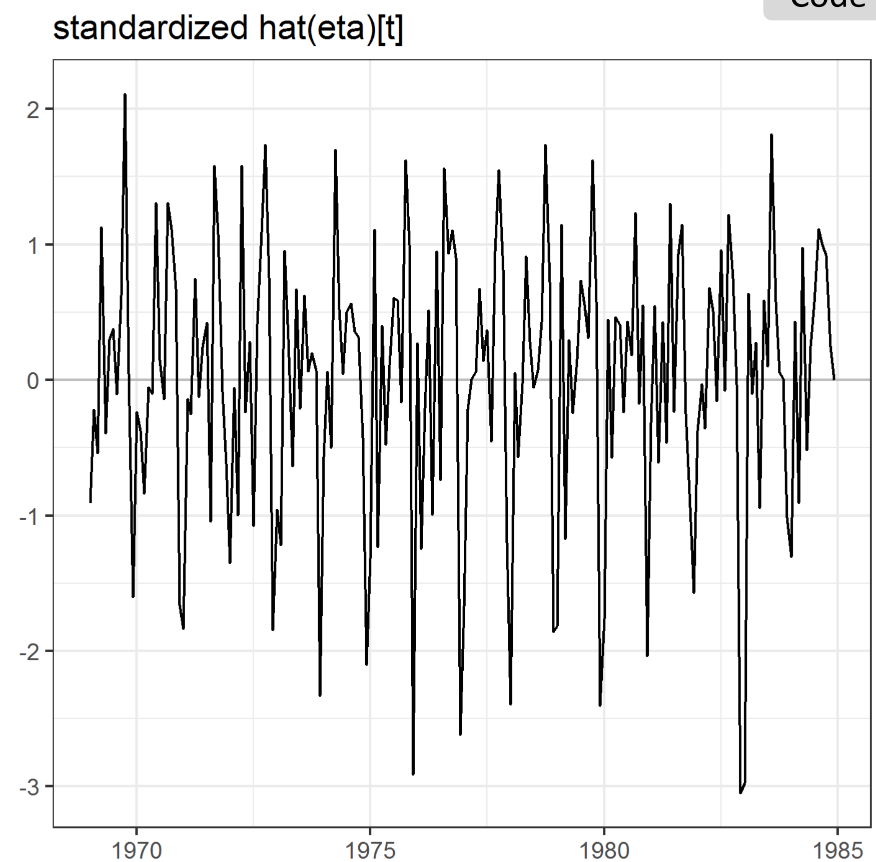
  を求めて観察する

  → **構造変化**を発見できる

例) 3-11. 説明変数のあるローカル・レベル・モデル (確率的レベル, 確定的係数)

Code 12





最大化された対数尤度関数の値を$\log L$, 状態の初期値の数をq, 推定するパラメータ数をwとして

$$AIC = -2\log L + 2(q + w)$$

を求め、モデルの比較に用いる。

小さな値のモデルは、よりデータにあてはまっている。

- AICの定義はパッケージや解説によって異なることがある。異なるパッケージ間で比較する際には注意が必要

Code 13

	AIC
3-10. 説明変数のあるローカル・レベル・モデル (確定的レベル, 確定的係数)	-165.1565
3-11. 説明変数のあるローカル・レベル・モデル (確率的レベル, 確定的係数)	**-239.9243**
3-12. 説明変数のあるローカル・レベル・モデル (確率的レベル, 確率的係数)	-237.9271

5. まとめ

状態空間モデルによる時系列モデリング

- ■ モデリングの自由度が高い
- ■ 非定常時系列を直接扱うことができる
  - ただし、モデルが正しいことが前提！ (cf. 3-10.)
  - 標準化予測誤差のチェックが重要
- ■ 状態空間表現に慣れる必要がある
- ■ 欠損値の扱いが楽 (CK pp.108-111)
- ■ 推定はやや面倒

この章の引用文献

Helske, J. (2017) KFAS: Exponential family state space models in R. Journal of Statistical Software, 78(10).

足立修一 (2017) 古くて新しいカルマンフィルタ. 計測と制御, 56(9), 630-631.

森平爽一郎 (2019) 「経済・ファイナンスのためのカルマンフィルター入門」. 朝倉書店.

Durbin, J., Koopman, S.J. (2012) "Time series analysis by state space methods.", Oxford Univ. Press.

この章に登場したRの関数

- KFAS::SSModel(...)
    - 状態空間モデルの定義を行う
- KFAS::fitSSM(...)
    - 状態空間モデルのパラメータ推定を行う
- KFAS::KFS(...)
    - 状態空間モデルの状態推定を行う
- KFAS::rstandard(KFSオブジェクト)
    - 状態推定の結果に基づき、標準化一期先予測誤差、補助残差を求める
- KFAS::logLik(SSModelオブジェクト)
    - 最大化された対数尤度を返す