インサイト・ファクトリー 社内勉強会資料 (web公開版)

対象者割付、その光と影

小野 滋

2024/05/09

INSIGHT FACTORY

この発表の主旨

- マーケティング・リサーチに関わるみなさまを対象として、
- 現代の消費者調査において広く行われている**対象者割付**と、それがもたらしうる弊害について紹介し
- 対処方法について考えます。

おわび

- 誤りが含まれているかもしれないです。すいません
- 堅苦しい感じの話が含まれています。すいません

私のなかの
統計学者のイメージ

私のなかの調査統計家のイメージ
(L. Kish, 1910-2000)
怖い

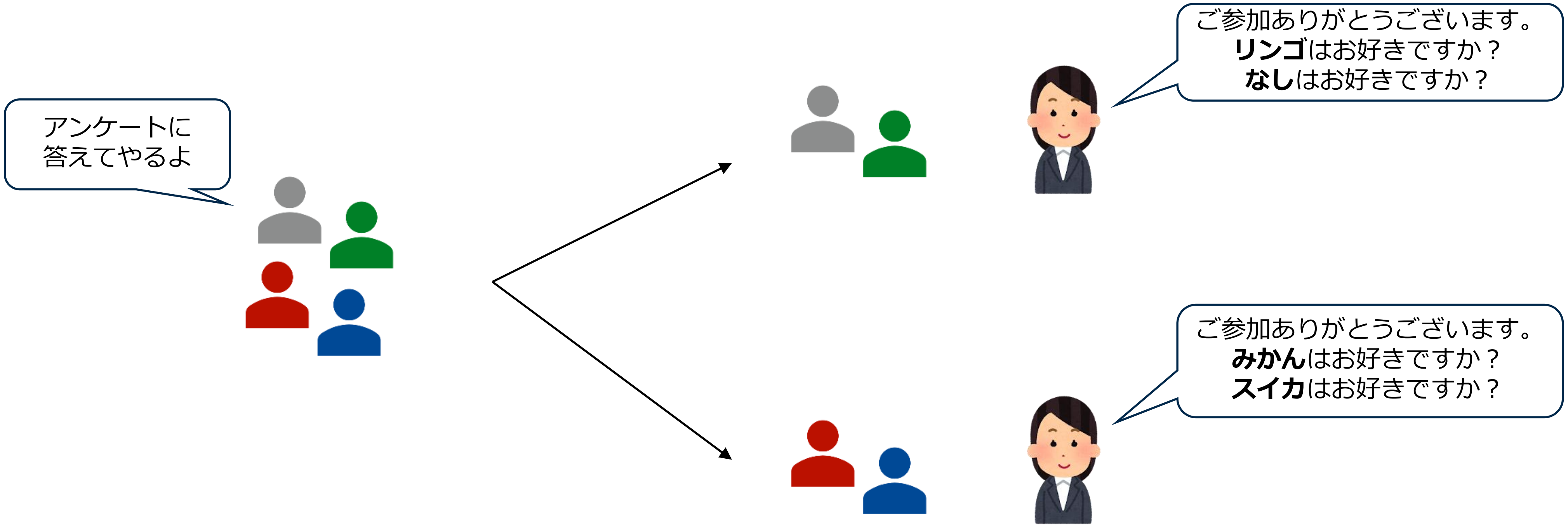
写真出典：Wikipedia

目次

1. イントロダクション

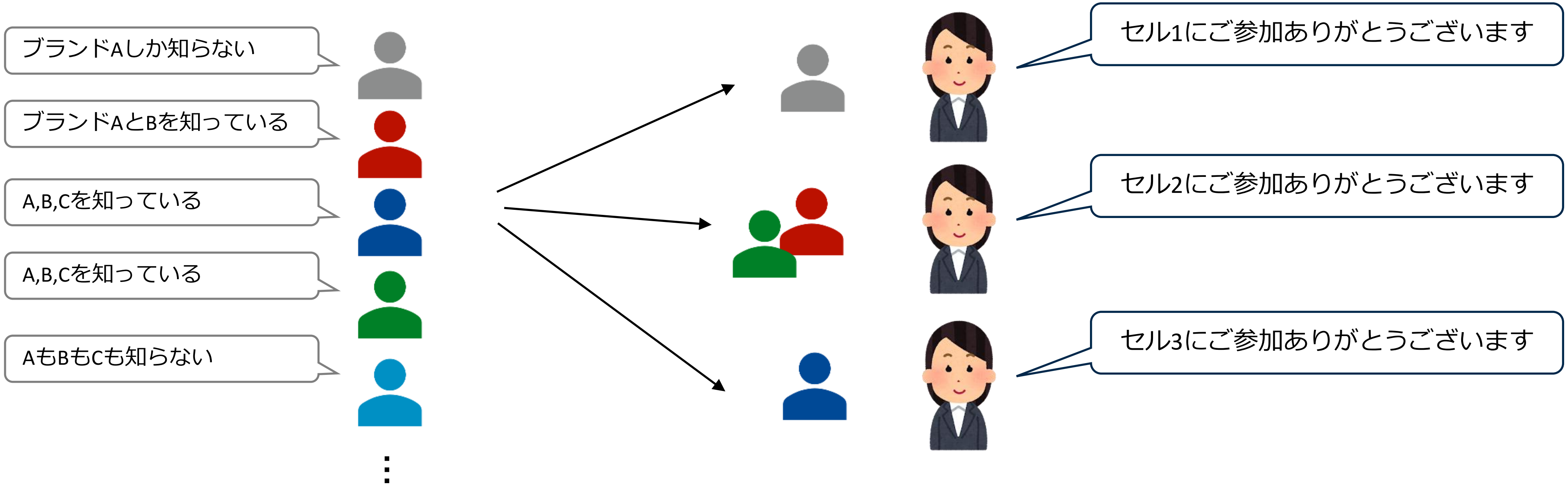
対象者割付とは

- 調査対象者を、異なる設問や提示物へと配分すること
  - 以下ではこうした設問・提示物を「**刺激**」と呼びます
  - ひとりの人が割り付けられる刺激は、ひとつの場合もあれば、複数の場合もあります



- リサーチャーにその自覚がなくても、実は対象者割付という問題が生じていることがあります。

対象者条件が異なる3つのセルを設定します。
セル1の対象者は自社ブランドAの認知者、
セル2の対象者は競合ブランドBの認知者、
セル3の対象者は競合ブランドCの認知者です。



問題

本日は、次のような状況における対象者割付について考えます。

- **各刺激について、刺激ごとに設定された条件を満たす人々の性質を調べたい**
- 各対象者を割り付ける刺激の数に上限を設けたい
- 各刺激について、目標とする割付人数を達成したい
- 調査対象者数をできるだけ減らしたい

消費者調査では、このような状況が頻繁に生じます。

例: ブランド・イメージ調査

- **ある製品カテゴリにおける各ブランドについて、そのブランドを知っている人々(ブランド認知者)に、そのブランドのイメージを聴取したい**
- ひとりの人に聴取するブランドの数は3個以下にしたい
- 各ブランドについて、100人以上の回答を得たい
- 調査対象者数をできるだけ減らしたい

	ブランド1	ブランド2	ブランド3	ブランド4	ブランド5	…
回答者数	101	102	101	100	103	…
イメージ項目1 反応率	69%	40%	10%	20%	18%	…
イメージ項目2 反応率	20%	30%	10%	15%	20%	…
イメージ項目3 反応率	15%	20%	80%	5%	35%	…
イメージ項目4 反応率	30%	10%	50%	10%	15%	…
…						

アウトプット・イメージ

各刺激について、その刺激ごとに定義された条件を満たす人々の性質に関心がある
(ある製品カテゴリにおける各ブランドについて、そのブランドを知っている人々が抱いているそのブランドについてのイメージを知りたい)

	刺激 1	刺激 2	刺激 3	刺激 4	…	刺激 K
対象者1	○		○	○	…	○
対象者2		○		○	…	
対象者3	○	○	○	○	…	
対象者4			○		…	○
対象者5	○	○		○	…	
対象者6					…	○
対象者7		○		○	…	
対象者8	○	○		○	…	
対象者9			○		…	
…	…	…	…	…	…	…
対象者T		○		○		

割付可能性
(○:割付可能刺激)

各対象者を割り付ける刺激の数に上限を設けたい
(ひとりの人に聴取するブランドの数は3個以下にしたい)

	刺激 1	刺激 2	刺激 3	刺激 4	…	刺激 K
対象者1	○		○	●	…	○
対象者2		○		○	…	
対象者3	●	○	○	●	…	
対象者4			●		…	●
対象者5	○	●		○	…	
対象者6					…	○
対象者7		○		●	…	
対象者8	○	●		●	…	
対象者9			●		…	
…	…	…	…	…	…	…
対象者T		○		○		

調査対象者数をできるだけ減らしたい

割付の結果
(●:割付刺激)

各刺激について、目標とする割付人数を達成したい
(各ブランドについて100人以上の回答を得たい)

- **各刺激について、刺激ごとに設定された条件を満たす人々の性質を調べたい**
- 各対象者を割り付ける刺激の数に上限を設けたい
- 各刺激について、目標とする割付人数を達成したい
- 調査対象者数をできるだけ減らしたい

上記の性質を持つ対象者割付は、現代のマーケティング・リサーチにおいて広く行われています。

- 「調査対象者に、その人が使ったことがあるブランドのうちひとつについて満足度を尋ねた」
- 「調査対象者に、その人の過去の購買 (最大2回)について、それぞれにおける経験を聴取した」
- …

割付は怖い

割付は怖い

- **各刺激について、刺激ごとに設定された条件を満たす人々の性質を調べたい**
- 各対象者を割り付ける刺激の数に上限を設けたい
- 各刺激について、目標とする割付人数を達成したい
- 調査対象者数をできるだけ減らしたい

このような対象者割付を行うとき、私たちは以下に挙げる深刻な問題に直面します。

- 多くの**調査対象者数**を必要とし、コストが増大する。
- 割付によって**バイアス**が生じる。
- 割付によって生じたバイアスを取り除くことが、**原理的にできない。**
- 割付によって生じたバイアスを取り除くために、**集計・分析の工数**が増大し、コストが増大する。
- 割付によって生じたバイアスを取り除くことで、集計値の**分散が拡大**する。
- 割付によって生じたバイアスを取り除くことが、**現実には困難**である。

例として、「ブランドA, B, Cのうち、対象者が知っているブランドをひとつまで選んで聴取する」場合について考えましょう。

- 対象者が知っているブランドは8通りありえます。
- 割付方法を決めると、下表の「?」欄の値が決まります。

ブランドAを	ブランドBを	ブランドCを		Aについて聴取される確率	Bについて聴取される確率	Cについて聴取される確率	いずれについても聴取されない確率
知らない	知らない	知らない	→	0	0	0	1
知らない	知らない	知っている	→	0	0	?	?
知らない	知っている	知らない	→	0	?	0	?
知らない	知っている	知っている	→	0	?	?	?
知っている	知らない	知らない	→	?	0	0	?
知っている	知らない	知っている	→	?	0	?	?
知っている	知っている	知らない	→	?	?	0	?
知っている	知っている	知っている	→	?	?	?	?

- 例として、4つの割付方法について考えてみましょう。

例1) ブランドをひとつ等確率に選び、対象者がそのブランドを知っていたらそれについて聴取する

- ひとりに聴取するブランドが１つの場合、もっともよく用いられている方法だと思います。
  - 「対象者をまず3つのセルに配分し、そのセルの対象者条件に合わなかった人は聴取を中止しよう」
- **多くの調査対象者数**が必要になります。
  - たとえば、上から2行目の人は、ブランドCについて知っているのに、ブランドCについて聴取される確率は1/3です。
  - 各ブランドについて必要な件数の回答を集めるためには、多くの対象者が必要になります。
    - 特にブランド認知率が低いとき(=下表の上のほうにある行に属する人が多いとき)、必要な対象者数は膨大になります。

ブランドAを	ブランドBを	ブランドCを		Aについて聴取される確率	Bについて聴取される確率	Cについて聴取される確率	いずれについても聴取されない確率
知らない	知らない	知らない	→	0	0	0	1
知らない	知らない	知っている	→	0	0	1/3	2/3
知らない	知っている	知らない	→	0	1/3	0	2/3
知らない	知っている	知っている	→	0	1/3	1/3	1/3
知っている	知らない	知らない	→	1/3	0	0	2/3
知っている	知らない	知っている	→	1/3	0	1/3	1/3
知っている	知っている	知らない	→	1/3	1/3	0	1/3
知っている	知っている	知っている	→	1/3	1/3	1/3	0

例2) 対象者がAを知っていたらAについて、Aを知らずBを知っていたらBについて、A,Bを知らずCを知っていたらCについて聴取する

これに類した方法も、ときどき用いられているようです。

- 「ブランドA,B,Cの順に認知率が低いから、スクリーニング調査でA,B,Cの認知を調べ、A,B,Cの順で優先して割り付けよう」

- この方法では、B,Cについて収集した回答に**バイアス**が生じます。
  - Bについて知っている対象者に注目しましょう。Bについて聴取される人のなかには、Aを知っている人が含まれていません。
  - ブランドAを知っている人と知らない人との間では、ブランドBについての回答の傾向が異なるかもしれません。そのとき、この方法で収集したBについての回答は歪みます。
  - 原則として、このバイアスを**取り除く方法はありません**。ブランドAとBを両方知っている人がブランドBについてどのように回答するか、情報が全く得られていないためです。

ブランドAを	ブランドBを	ブランドCを		Aについて聴取される確率	Bについて聴取される確率	Cについて聴取される確率	いずれについても聴取されない確率
知らない	知らない	知らない	→	0	0	0	1
知らない	知らない	知っている	→	0	0	1	0
知らない	知っている	知らない	→	0	1	0	0
知らない	知っている	知っている	→	0	1	0	0
知っている	知らない	知らない	→	1	0	0	0
知っている	知らない	知っている	→	1	0	0	0
知っている	知っている	知らない	→	1	0	0	0
知っている	知っている	知っている	→	1	0	0	0

例3) 対象者が知っているブランドのなかからひとつを等確率に選び、それについて聴取する

- これに類した方法も、ときどき用いられているようです。
    - 「スクリーニング調査でA,B,Cの認知を調べ、認知ブランドのうちひとつにランダムに割り付けよう」
- この方法の場合も、収集した回答にバイアスが生じます。
    - 集計・分析の際にバイアスを取り除く方法がありますが、バイアスを取り除く手続きによって**集計・分析の工数**が増大します。また、多くの場合、バイアスを取り除くことによって集計値の**分散** (ばらつき)が拡大します。
- さらにこの方法では、認知率が低いブランドの聴取対象者が少なくなってしまいます。

ブランドAを	ブランドBを	ブランドCを		Aについて聴取される確率	Bについて聴取される確率	Cについて聴取される確率	いずれについても聴取されない確率
知らない	知らない	知らない	→	0	0	0	1
知らない	知らない	知っている	→	0	0	1	0
知らない	知っている	知らない	→	0	1	0	0
知らない	知っている	知っている	→	0	1/2	1/2	0
知っている	知らない	知らない	→	1	0	0	0
知っている	知らない	知っている	→	1/2	0	1/2	0
知っている	知っている	知らない	→	1/2	1/2	0	0
知っている	知っている	知っている	→	1/3	1/3	1/3	0

例4) <u>「対象者が調査に参加した時点で聴取者数が目標に達しておらず、かつその対象者が知っているブランド」のなかからひとつを等確率に選び、それについて聴取する</u>

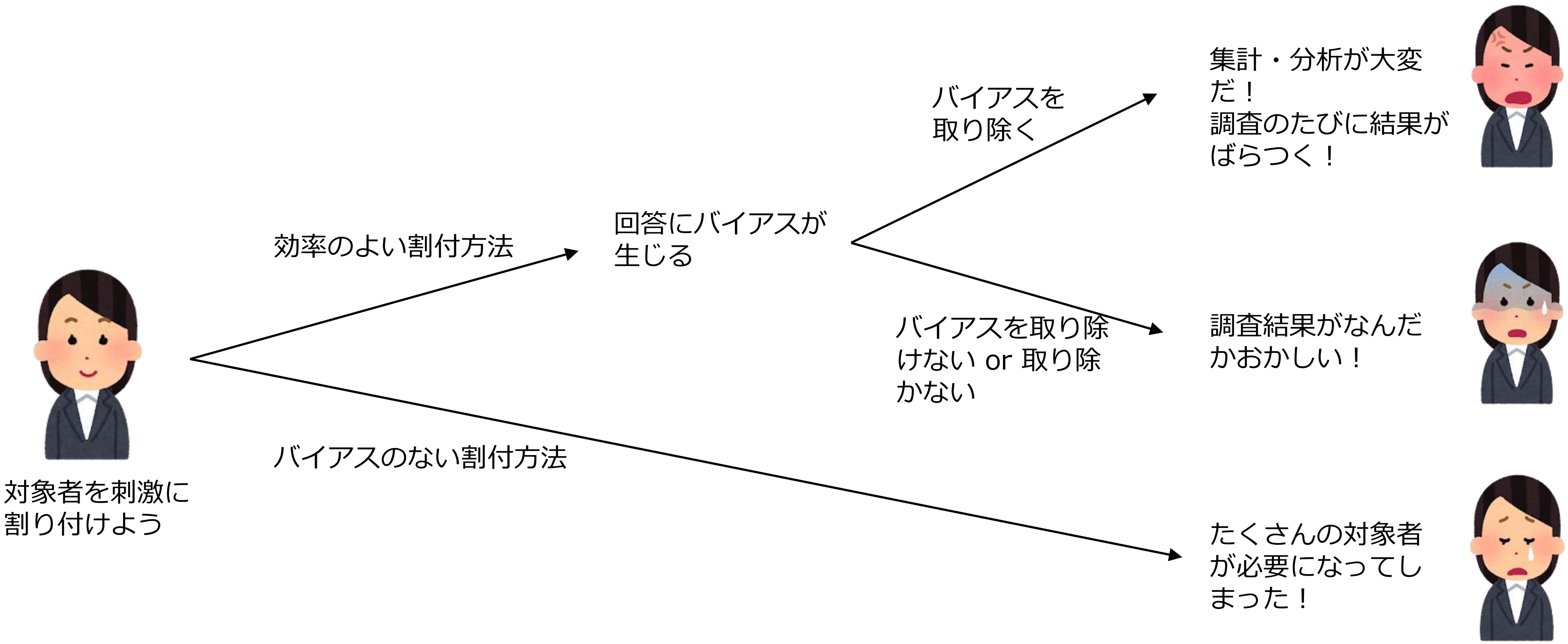
- これに類した方法も用いられることがあるようです。
    - 「回収票数が目標に達したセルは順次閉じていこう」
- この方法の場合、収集した回答にバイアスが生じます。バイアスを取り除くのは、**現実には困難**です。
    - ある人があるブランドについて聴取される確率は、すべての対象者を通じたブランド認知の分布(=対象者において下の表の8行が占める割合)と、目標とする聴取者数に依存します。そのため、容易にはわかりません。

ブランドAを	ブランドBを	ブランドCを		Aについて聴取される確率	Bについて聴取される確率	Cについて聴取される確率	いずれについても聴取されない確率
知らない	知らない	知らない	→	0	0	0	1
知らない	知らない	知っている	→	0	0	?	?
知らない	知っている	知らない	→	0	?	0	?
知らない	知っている	知っている	→	0	?	?	?
知っている	知らない	知らない	→	?	0	0	?
知っている	知らない	知っている	→	?	0	?	?
知っている	知っている	知らない	→	?	?	0	?
知っている	知っている	知っている	→	?	?	?	?

対象者割付をめぐるジレンマ

私たちは調査実務において、なんらかの方法で対象者を刺激へと割り付けなければならない場面に遭遇します。

割付方法の中には非効率的なものがあります(例1)。しかし、多くの場合、効率的な割付方法は収集した回答に深刻なバイアスをもたらします。そのバイアスは、原理的に取り除けなかったり(例2)。現実には取り除くのが難しかったりします(例4)。取り除ける場合も、それによって工数が増大しますし、多くの場合、集計値の分散が拡大します(例3) 。



本発表の内容

どのような割付方法が効率的でしょうか？

どのような割付方法ならバイアスが生じにくいでしょうか？

どのような割付方法ならバイアスを取り除けるでしょうか？

バイアスを取り除くためには、どうすればよいのでしょうか？

バイアスを取り除いたとき、分散はどのくらい大きくなるのでしょうか？

以下では、

- 割付によって生じるバイアスの性質、ならびにそれを取り除くことによる分散の拡大について説明します。 (**2章**)
- さまざまな割付方法とそのおおまかな性質について検討します。 (**3章**)
- 次の3点について、その具体的な方法を提案します。
    - 調査を実施したのち、割付によって生じたバイアスを取り除く方法 (**4 章**)
    - 調査を計画しているとき、割付方法の効率性を事前に評価する方法 (**5 章**)
    - 調査を計画しているとき、割付によって生じるバイアスと、それを取り除くことによる分散の拡大を評価する方法 (**6 章**)
- 対象者割付に関わる発展的な話題を紹介します。(**7章**)
- 最後に、この発表で紹介した分析を簡単に行うことができるソフトウェアを紹介します。(**8章**)

用語

以下の説明で用いる用語をまとめます。

用語	説明	ブランド・イメージ調査では
刺激	各対象者に提示される、異なる設問や提示物	ブランド (20個)
割付	各対象者に提示する刺激を決めること	各対象者にどのブランドについて聴取するかを決めること
割付可能対象者	刺激ごとに設定された条件を満たす対象者。調査者は各刺激についてこの人々の性質に関心を持っている	そのブランドを知っている対象者
割付対象者	その刺激を実際に提示する対象者	そのブランドについて聴取する対象者 (目標100人)
割付可能刺激	各対象者からみて、設定された条件を自分が満たしている刺激	その対象者が知っているブランド
割付刺激	各対象者に実際に提示する刺激。その数に上限が設定されている	その対象者に聴取するブランド (上限3個)
割付確率	ある対象者がある刺激に割付可能であるとき、その対象者にその刺激を提示する確率	ある対象者があるブランドを知っているとき、その人にそのブランドについて聴取する確率
調査変数	刺激を提示した下で測定する、私たちにとって関心ある変数。ひとつないし複数	ブランド・イメージ項目への回答

2. 対象者割付によってなにが起きるか

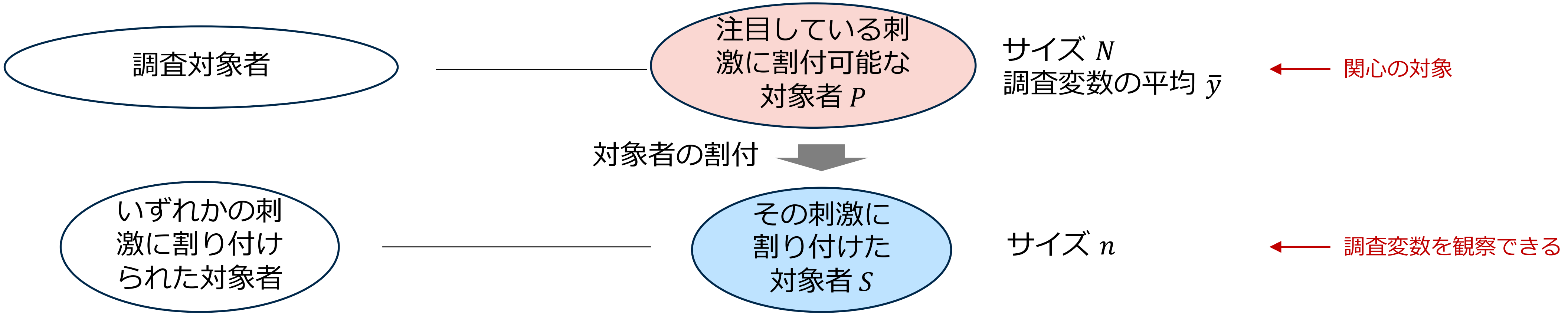
この章では

具体的な割付方法の話は、いったん横に置いておいて…

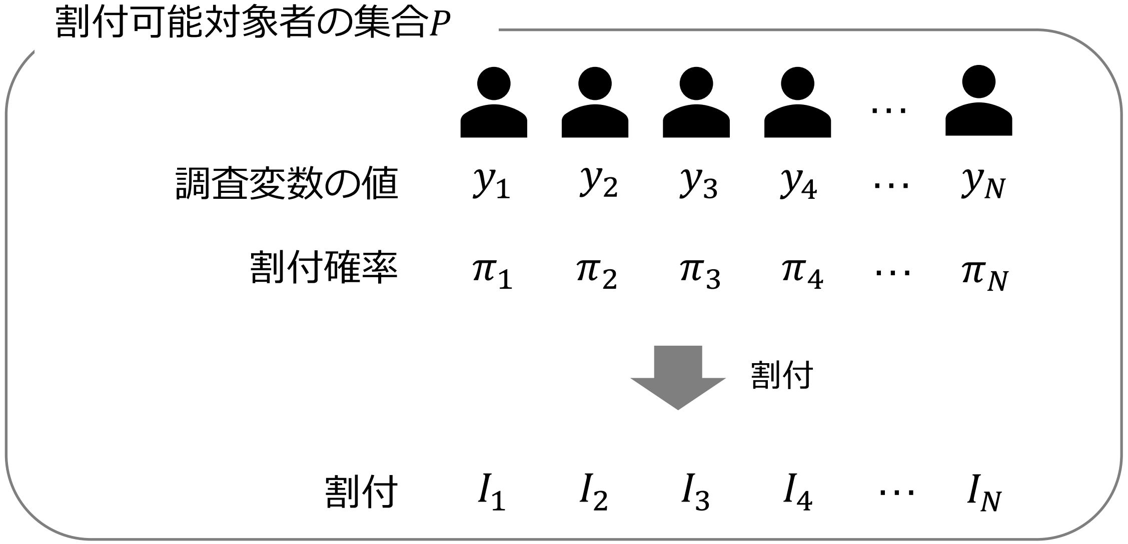
- 割付によって生じるバイアスの性質を調べます。
- バイアスを取り除くための方法と、それによる分散の拡大について調べます。

この章の設定

- ある特定の刺激に注目します。
- 母集団からなんらかの方法で抽出した調査対象者の集合について考えます。
    - その刺激に割付可能である対象者の(順序のない)集合を P、そのサイズを N とします。
- 対象者割付を行います。
    - その刺激に割り付けられた対象者の集合を S とします。そのサイズを n とします。
- 調査対象者 i は、その刺激に割付可能であるとき、調査変数の値 y_i を持つものとします。
- 話を簡単にするため、関心の対象は、(母集団の性質ではなく) 割付可能対象者集合 P における調査変数の平均 $\bar{y}$ であると考えます。



- ある刺激の割付可能対象者 i がその刺激に割り付けられる確率(**割付確率**)を π_i とします。
- ある刺激の割付可能対象者 i, j が同時にその刺激に割り付けられる確率を π_{ij} とします。
- 対象者 i がある刺激に割り付けられたとき 1, 割り付けられなかったとき 0 となる確率変数を I_i とします。
    - この確率変数は次の性質を持ちます：
        - 期待値: $E[I_i] = \pi_i$
        - 分散: $Var(I_i) = E\left[I_i^2\right] - (E[I_i])^2 = \pi_i - \pi_i^2$
        - 共分散: $Cov\left(I_i, I_j\right) = E\left[I_i I_j\right] - E[I_i]E\left[I_j\right] = \pi_{ij} - \pi_i \pi_j$



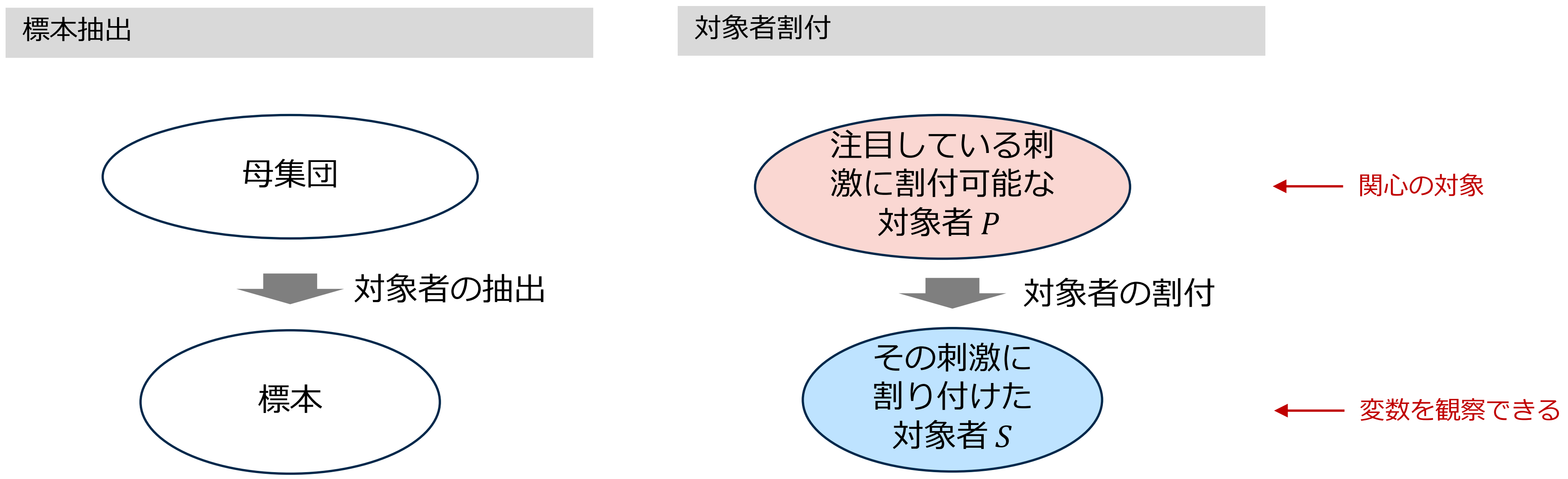
この章では、以下のように仮定します。

- **すべての割付可能対象者について、$\boldsymbol{\pi_i > 0}$である**
  - もし$\pi_i = 0$の人々が存在したら、その人々については全く情報が得られません(前章の例2を参照) 。
  - 従って、バイアスが生じ、しかもそのバイアスを取り除くことができません。

- **すべての割付可能対象者について、$\boldsymbol{\pi_i}$が既知である**
  - 説明の都合上の仮定です。

標本抽出との関係

- この章で扱う内容は、対象者割付だけでなく、すべての標本抽出にあてはまる一般的な内容です。
    - $\mathcal{P}$と$\mathcal{S}$の関係は、標本抽出における母集団と標本の関係に対応しています。
    - 割付確率 π_i 、同時割付確率π_{ij}は、標本抽出でいう「包含確率」「同時包含確率」に対応しています。



3つの推定量

私たちの関心の対象は、割付可能対象者における調査変数の平均

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i \in P} y_i$$

です。

私たちは割り付けられた対象者の集合 S を観察し、どうにかして $\bar{y}$ を推定しようとします。

その代表的な方法として、次の3つの推定方法(推定量) があります。

- **標本平均**

$$\hat{\bar{y}}_{Simple} = \frac{1}{n}\sum_{i \in S} y_i$$

- **Horvitz-Thompson推定量**

$$\hat{\bar{y}}_{HT} = \frac{1}{N}\sum_{i \in S} \frac{y_i}{\pi_i}$$

- **Hajek推定量**

$$\hat{\bar{y}}_{Hajek} = \frac{1}{\sum_{i \in S} \frac{1}{\pi_i}}\sum_{i \in S} \frac{y_i}{\pi_i}$$

1）標本平均

$$\hat{\bar{y}}_{Simple} = \frac{1}{n}\sum_{i \in S} y_i$$

- 割り付けられた対象者を通じて y_i を合計し、人数で割っています。
- もっともわかりやすい推定量です。
- 割付確率が人によって異なるとき、バイアスが生じることがあります。

日の出を祝うピタゴラスとピタゴラス教団のみなさん。
平均の性質を研究しておられたそうです

2）Horvitz-Thompson推定量 (HT推定量, π推定量)

$$\hat{\bar{y}}_{HT} = \frac{1}{N}\sum_{i \in S}\frac{y_i}{\pi_i}$$

- 割り付けられた対象者を通じて、y_iを**割付確率π_iの逆数で重みづけて合計**し、**割付可能対象者数**で割っています。

- HT推定量のなりたち
  - 割付可能対象者における調査変数の合計 $\sum_{i \in \mathcal{P}} y_i$を、割り付けられた対象者を用いて推定してみましょう。
    - たとえば、割り付けられた対象者のなかに「割付確率が 0.1」であった田中さんが含まれていたとします。
    - 田中さんは、割付可能対象者から「10人にひとり」の確率で選ばれた人です。いわば、田中さんは10人分を代表しています。それらの仮想的な10人の値の合計は、田中さんの値を10倍することで推定できるでしょう。つまり、田中さんの値に重み 1/0.1 を掛けることで推定できるでしょう。
    - これを割り付けられた対象者全員について繰り返し、合計すると、合計の推定量 $\sum_{i \in \mathcal{S}} \frac{y_i}{\pi_i}$ が得られます。
  - 平均 $\bar{y}$ は合計の$1/N$ですから、平均の推定量は $\frac{1}{N}\sum_{i \in \mathcal{S}} \frac{y_i}{\pi_i}$ となります。

Daniel G. Horvitz
(1921-2008)
Thompsonさんの写真
はみつかりませんでした

写真出典: https://magazine.amstat.org/wp-content/uploads/2008an/JULY08.pdf

3）Hajek推定量 (サイズを用いた比推定量, 重み付き平均)

$$\hat{\bar{y}}_{Hajek} = \frac{1}{\sum_{i \in S} \frac{1}{\pi_i}} \sum_{i \in S} \frac{y_i}{\pi_i}$$

- 割り付けられた対象者を通じて、y_iを**割付確率π_iの逆数で重みづけて合計**し、**重みの合計**で割っています。
  - 私たちがふだん使っている「ウェイティングした平均」「重み付き平均」に相当します。

- Hajek推定量のなりたち
  - 割付可能対象者数Nを、割り付けられた対象者を用いて推定してみましょう。
    - 常に1である変数x_iについて考えます。Nとは、割付可能対象者におけるx_iの合計です。そのHT推定量は次式となります。

$$\hat{N} = \sum_{i \in S} \frac{x_i}{\pi_i}$$

  - $\bar{y}$のHT推定量のなかのNを$\hat{N}$に置き換えると、Hajek 推定量になります。
    - すなわち、「Nについて知っていてもあえて使わない」という考え方です。

Jaroslav Hájek
(1926-1974)
チェコの数学者。
ハイエクと読むらしいです

写真出典: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hajek/

推定量のバイアスと分散

私たちの関心の対象は $\bar{y}$ です。しかし、推定値を得る前も、得た後でも、私たちは $\bar{y}$ の真の値を知ることはできません。

統計的推定とは、いわば、目を閉じてダーツを投げ、ダーツ盤を見ないまま家に帰るようなものです。

ところで、ダーツが上手いとはどういうことでしょうか？

もっとも単純な定義は、「投げたダーツが目標の近くに刺さること」でしょう。

それはさらに、次の2つの要素にわけることができます。

a.　ダーツを何度も投げたとき、それらが刺さる場所が目標から見て、いずれかの方向に偏っていないこと。

b.　ダーツを投げるたびに、別の場所に刺さったりしないこと。

aの意味で下手な人

bの意味で下手な人

ヨハネス・フェルメール「目を閉じてダーツを投げる女」(うそです)

統計的推定についても同様に考えることができます。

$\bar{y}$ を推定するためのなんらかの方法 (推定量) $\hat{y}$ があるとします。$\hat{y}$ の良さとして、**正確性**(推定値が推定の対象と近いこと)に注目しましょう。

- 正確性を表す指標として、$\hat{y}$ のMSE (推定値と推定対象の差の二乗の期待値)を用いることにします。

$$MSE(\hat{y}, \bar{y}) = E[(\hat{y} - \bar{y})^2]$$

正確性は、次の2つの要素に分けることができます。

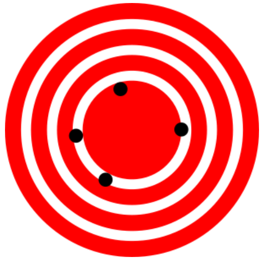
- **バイアス**：推定値が、長い目で見て $\bar{y}$ よりも大きめになったり小さめになったりしないか。
  - その指標を次式としましょう。

$$Bias(\hat{y}, \bar{y}) = E[\hat{y}] - \bar{y}$$

- **分散**: 推定値がどのくらいばらつくか。
  - その指標として $\hat{y}$ の分散を使いましょう。

$$Var(\hat{y}) = E[(\hat{y} - E[\hat{y}])^2]$$

バイアスが大きくて
分散が小さい推定量



バイアスが小さくて
分散が大きい推定量

- 正確性(MSE)は、バイアスの二乗と分散の和です。

$$
\begin{aligned}
&MSE(\hat{y}, \bar{y}) \\
&= E[(\hat{y} - \bar{y})^2] \\
&= E[(\hat{y} - E[\hat{y}] + E[\hat{y}] - \bar{y})^2] \\
&= E[(\hat{y} - E[\hat{y}])^2 + 2(\hat{y} - E[\hat{y}])(E[\hat{y}] - \bar{y}) + (E[\hat{y}] - \bar{y})^2] \\
&= E[(\hat{y} - E[\hat{y}])^2 + 2(\hat{y}E[\hat{y}] - \bar{y}\hat{y} - (E[\hat{y}])^2 + \bar{y}E[\hat{y}]) + (E[\hat{y}] - \bar{y})^2] \\
&= E[(\hat{y} - E[\hat{y}])^2] + 2\{(E[\hat{y}])^2 - \bar{y}E[\hat{y}] - (E[\hat{y}])^2 + \bar{y}E[\hat{y}]\} + (E[\hat{y}] - \bar{y})^2 \\
&= E[(\hat{y} - E[\hat{y}])^2] + (E[\hat{y}] - \bar{y})^2 \\
&= Var(\hat{y}) + Bias(\hat{y}, \bar{y})^2
\end{aligned}
$$

3つの推定量のバイアスと分散

では、3つの推定量は、どのようなバイアスと分散を持っているでしょうか。その性質を下表に要約します。

- Appendix A.でこれらの導出を行っています。もし関心がありましたらご覧ください。

		バイアス	分散
標本平均	$\bar{y}_{Simple} = \frac{1}{n}\sum_{i \in S} y_i$	$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_N)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_N)$として、およそ $Corr(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{y}) \times \frac{SD(\boldsymbol{\pi})}{\bar{\pi}} \times SD(\boldsymbol{y})$	$t_\pi = \sum_{i \in P} \pi_i$, $t_{\pi y} = \sum_{i \in P} \pi_i y_i$ として、およそ $\frac{1}{N^2}\left[\sum_{i \in P} \frac{\left(y_i - \frac{t_{\pi y}}{t_\pi}\right)^2}{\bar{\pi}^2}(\pi_i - \pi_i^2) + \sum_{i \in P}\sum_{j \in P; j \neq i} \frac{(y_i - \frac{t_{\pi y}}{t_\pi})(y_j - \frac{t_{\pi y}}{t_\pi})}{\bar{\pi}^2}(\pi_{ij} - \pi_i \pi_j)\right]$
HT推定量	$\bar{y}_{HT} = \frac{1}{N}\sum_{i \in S} \frac{y_i}{\pi_i}$	0	$\frac{1}{N^2}\left[\sum_{i \in P} \frac{y_i^2}{\pi_i^2}(\pi_i - \pi_i^2) + \sum_{i \in P}\sum_{j \in P; j \neq i} \frac{y_i y_j}{\pi_i \pi_j}(\pi_{ij} - \pi_i \pi_j)\right]$
Hajek推定量	$\bar{y}_{Hajek} = \frac{1}{\sum_{i \in S}\frac{1}{\pi_i}}\sum_{i \in S} \frac{y_i}{\pi_i}$	およそ0	およそ $\frac{1}{N^2}\left[\sum_{i \in P} \frac{(y_i - \bar{y})^2}{\pi_i^2}(\pi_i - \pi_i^2) + \sum_{i \in P}\sum_{j \in P; j \neq i} \frac{(y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y})}{\pi_i \pi_j}(\pi_{ij} - \pi_i \pi_j)\right]$

下表から読み取れることを3点挙げます。

1） 割付によって生じるバイアスは、割付確率と調査変数の間に相関があり、割付確率のばらつきが大きいときに、大きくなる。

- 「調査変数の値が高いほど割り付けされやすい」とき、標本平均には正方向のバイアスが生じる。
- 「調査変数の値が低いほど割り付けされやすい」とき、標本平均には負方向のバイアスが生じる。
- 割付可能対象者の間で割り付けされやすさにばらつきが大きいほど、バイアスは拡大する。

		バイアス	分散
標本平均	$\bar{y}_{Simple} = \frac{1}{n}\sum_{i\in S} y_i$	およそ $Corr(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{y}) \times \frac{SD(\boldsymbol{\pi})}{\bar{\pi}} \times SD(\boldsymbol{y})$	$t_\pi = \sum_{i\in P}\pi_i, t_{\pi y} = \sum_{i\in P}\pi_i y_i$ として、およそ $\frac{1}{N^2}\left[\sum_{i\in P}\frac{\left(y_i - \frac{t_{\pi y}}{t_\pi}\right)^2}{\bar{\pi}^2}(\pi_i - \pi_i^2) + \sum_{i\in P}\sum_{j\in P;j\neq i}\frac{(y_i - \frac{t_{\pi y}}{t_\pi})(y_j - \frac{t_{\pi y}}{t_\pi})}{\bar{\pi}^2}(\pi_{ij} - \pi_i\pi_j)\right]$
HT推定量	$\bar{y}_{HT} = \frac{1}{N}\sum_{i\in S}\frac{y_i}{\pi_i}$	0	$\frac{1}{N^2}\left[\sum_{i\in P}\frac{y_i^2}{\pi_i^2}(\pi_i - \pi_i^2) + \sum_{i\in P}\sum_{j\in P;j\neq i}\frac{y_i y_j}{\pi_i\pi_j}(\pi_{ij} - \pi_i\pi_j)\right]$
Hajek推定量	$\bar{y}_{Hajek} = \frac{1}{\sum_{i\in S}\frac{1}{\pi_i}}\sum_{i\in S}\frac{y_i}{\pi_i}$	およそ0	およそ $\frac{1}{N^2}\left[\sum_{i\in P}\frac{(y_i - \bar{y})^2}{\pi_i^2}(\pi_i - \pi_i^2) + \sum_{i\in P}\sum_{j\in P;j\neq i}\frac{(y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y})}{\pi_i\pi_j}(\pi_{ij} - \pi_i\pi_j)\right]$

2) HT推定量によって割付によって生じるバイアスを取り除くことができる。いっぽうHT推定量の分散は、ふつう標本平均の分散より大きい。

- 分散は、調査変数と割付確率の間に正の相関があるとき小さくなり、負の相関があるとき大きくなる。

分子は調査変数とその重みづけ平均との差の二乗
分母は割付確率の平均の二乗

分子は調査変数そのものの二乗。標本平均の式より不利
分母は割付確率そのものの二乗。標本平均の式より不利
ただし、分子と分母が正の相関を持っていると有利になる

		バイアス	分散
標本平均	$\bar{y}_{Simple} = \frac{1}{n}\sum_{i \in S} y_i$	およそ $Corr(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{y}) \times \frac{SD(\boldsymbol{\pi})}{\bar{\pi}} \times SD(\boldsymbol{y})$	$t_\pi = \sum_{i \in P} \pi_i,\ t_{\pi y} = \sum_{i \in P} \pi_i y_i$ として、およそ $\frac{1}{N^2}\left[\sum_{i \in P} \frac{\left(y_i - \frac{t_{\pi y}}{t_\pi}\right)^2}{\bar{\pi}^2}(\pi_i - \pi_i^2) + \sum_{i \in P}\sum_{j \in P; j \neq i} \frac{(y_i - \frac{t_{\pi y}}{t_\pi})(y_j - \frac{t_{\pi y}}{t_\pi})}{\bar{\pi}^2}(\pi_{ij} - \pi_i \pi_j)\right]$
HT推定量	$\bar{y}_{HT} = \frac{1}{N}\sum_{i \in S} \frac{y_i}{\pi_i}$	0	$\frac{1}{N^2}\left[\sum_{i \in P} \frac{y_i^2}{\pi_i^2}(\pi_i - \pi_i^2) + \sum_{i \in P}\sum_{j \in P; j \neq i} \frac{y_i y_j}{\pi_i \pi_j}(\pi_{ij} - \pi_i \pi_j)\right]$
Hajek推定量	$\bar{y}_{Hajek} = \frac{1}{\sum_{i \in S}\frac{1}{\pi_i}}\sum_{i \in S} \frac{y_i}{\pi_i}$	およそ0	およそ $\frac{1}{N^2}\left[\sum_{i \in P} \frac{(y_i - \bar{y})^2}{\pi_i^2}(\pi_i - \pi_i^2) + \sum_{i \in P}\sum_{j \in P; j \neq i} \frac{(y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y})}{\pi_i \pi_j}(\pi_{ij} - \pi_i \pi_j)\right]$

3) Hajek推定量によって割付によって生じるバイアスをほぼ取り除くことができる。いっぽうHajek推定量の分散は、ふつうHT推定量の分散より小さい。

- 標本平均と比べると、割付によるバイアスがほぼ取り除かれる代わりに、分散が大きくなる可能性がある。従って、標本平均よりも推定の正確性が高くなる (MSEが小さくなる) とは必ずしもいえない。

		バイアス	分散
標本平均	$\bar{y}_{Simple} = \frac{1}{n}\sum_{i \in S} y_i$	およそ $Corr(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{y}) \times \frac{SD(\boldsymbol{\pi})}{\bar{\pi}} \times SD(\boldsymbol{y})$	$t_\pi = \sum_{i \in P} \pi_i, t_{\pi y} = \sum_{i \in P} \pi_i y_i$ として、およそ $\frac{1}{N^2}\left[\sum_{i \in P} \frac{\left(y_i - \frac{t_{\pi y}}{t_\pi}\right)^2}{\bar{\pi}^2}(\pi_i - \pi_i^2) + \sum_{i \in P}\sum_{j \in P; j \neq i} \frac{(y_i - \frac{t_{\pi y}}{t_\pi})(y_j - \frac{t_{\pi y}}{t_\pi})}{\bar{\pi}^2}(\pi_{ij} - \pi_i \pi_j)\right]$
HT推定量	$\bar{y}_{HT} = \frac{1}{N}\sum_{i \in S} \frac{y_i}{\pi_i}$	0	$\frac{1}{N^2}\left[\sum_{i \in P} \frac{y_i^2}{\pi_i^2}(\pi_i - \pi_i^2) + \sum_{i \in P}\sum_{j \in P; j \neq i} \frac{y_i y_j}{\pi_i \pi_j}(\pi_{ij} - \pi_i \pi_j)\right]$
Hajek推定量	$\bar{y}_{Hajek} = \frac{1}{\sum_{i \in S}\frac{1}{\pi_i}}\sum_{i \in S} \frac{y_i}{\pi_i}$	およそ0	およそ $\frac{1}{N^2}\left[\sum_{i \in P} \frac{(y_i - \bar{y})^2}{\pi_i^2}(\pi_i - \pi_i^2) + \sum_{i \in P}\sum_{j \in P; j \neq i} \frac{(y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y})}{\pi_i \pi_j}(\pi_{ij} - \pi_i \pi_j)\right]$

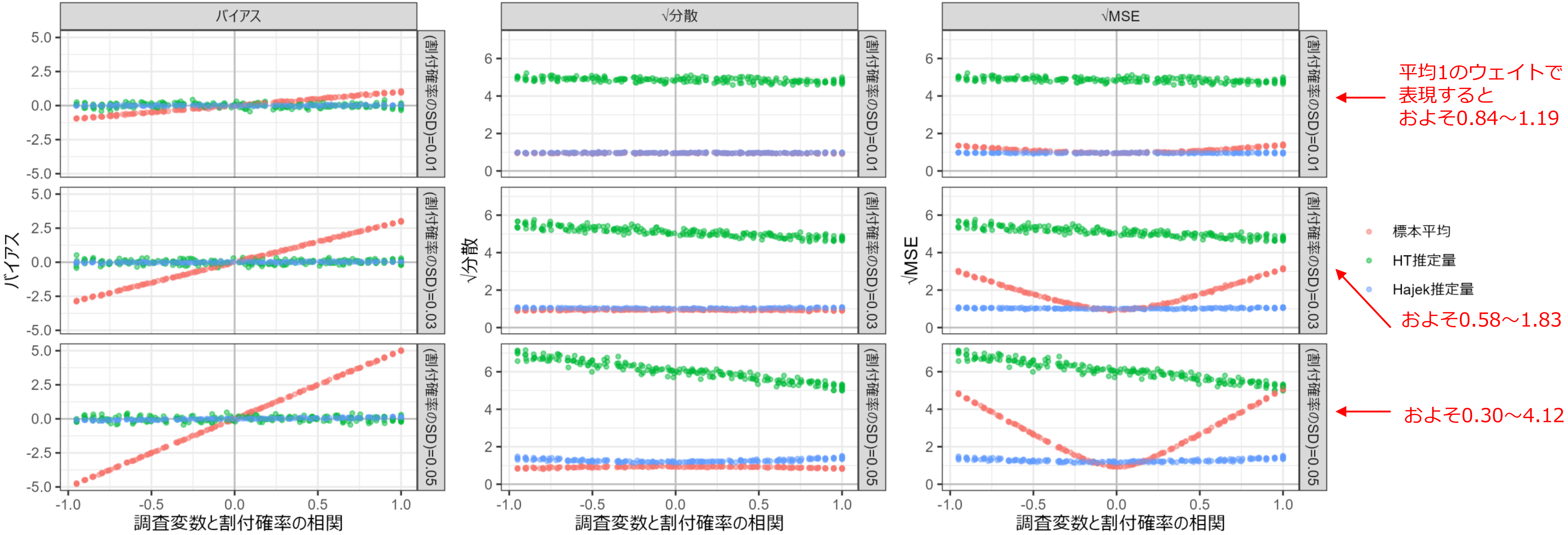
分子は調査変数とその平均との差の二乗。HT推定量より有利
分母は割付確率の二乗。標本平均の式より不利

シミュレーション: 推定量のバイアスと分散

３つの推定量の性質について理解するために、簡単なシミュレーションを行いました。詳細はAppendix B.をご覧ください。

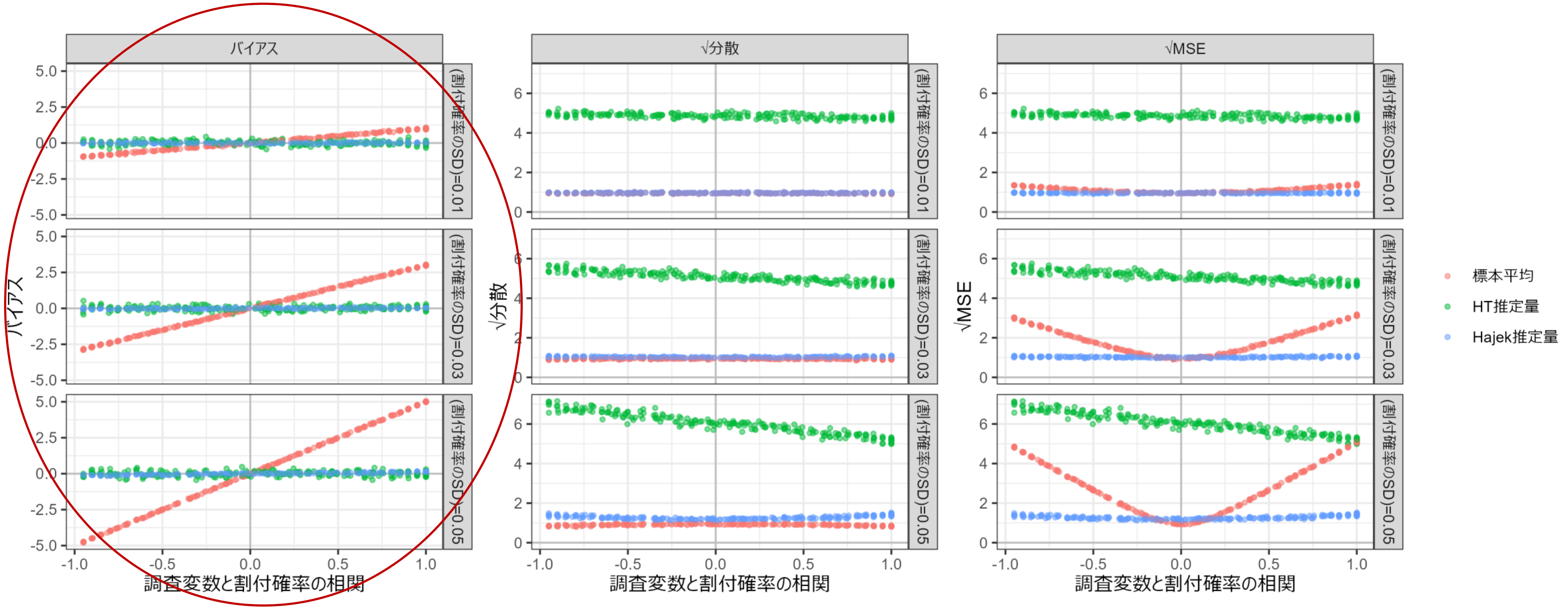
下の図は、さまざまな割付可能対象者集合(1000人)について割付を行い、調査変数の平均を推定したときのバイアス、分散、MSEを表しています。

- なお、いずれの割付可能対象者集合においても、割付可能対象者集合における調査変数の分散は10、割付確率の平均は0.1です(つまり割付対象者数はおよそ100人です)。



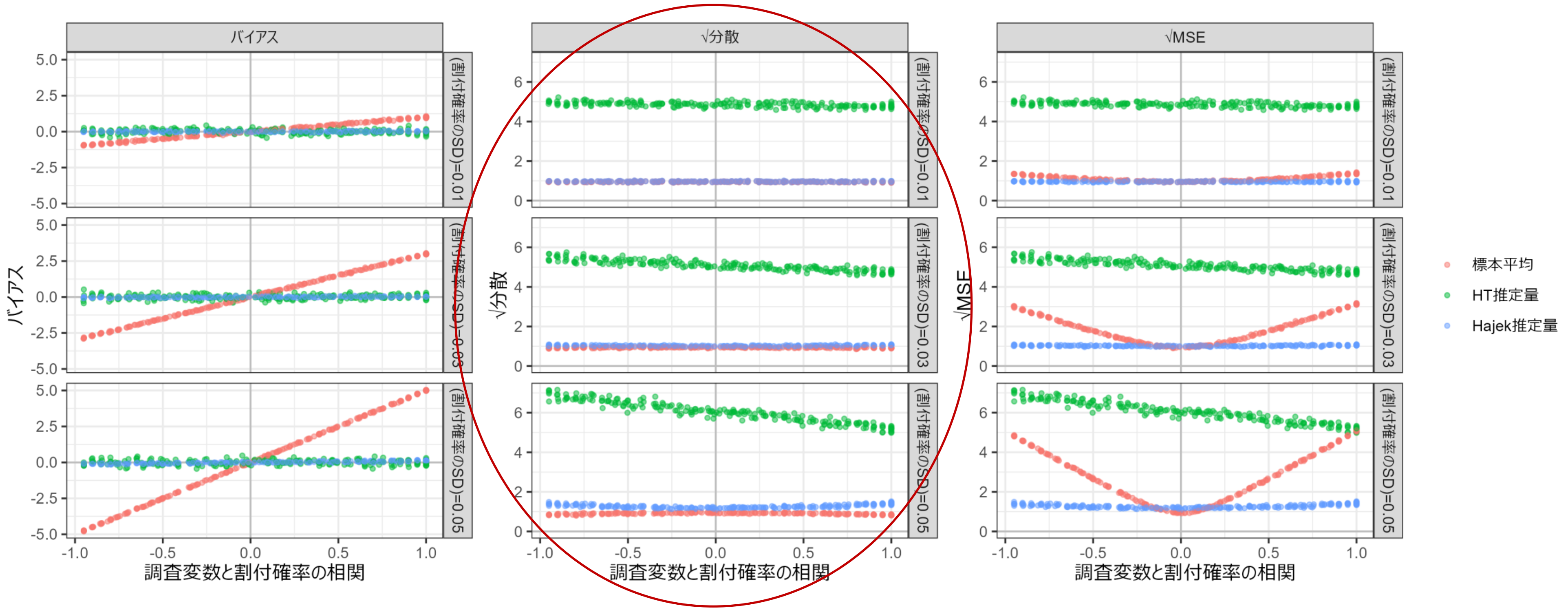
まず、推定量のバイアスについてみてみましょう。

- 標本平均は、調査変数と割付確率に正の相関があるときに過大となり、負の相関があるときに過小となります。このバイアスは、割付確率のばらつきが大きいときに著しくなります。
- HT推定量とHajek推定量では、このバイアスが取り除かれています。
  - 厳密には、Hajek推定量ではバイアスを完全に取り除くことができないのですが、あまり気にしなくてもよさそうです。



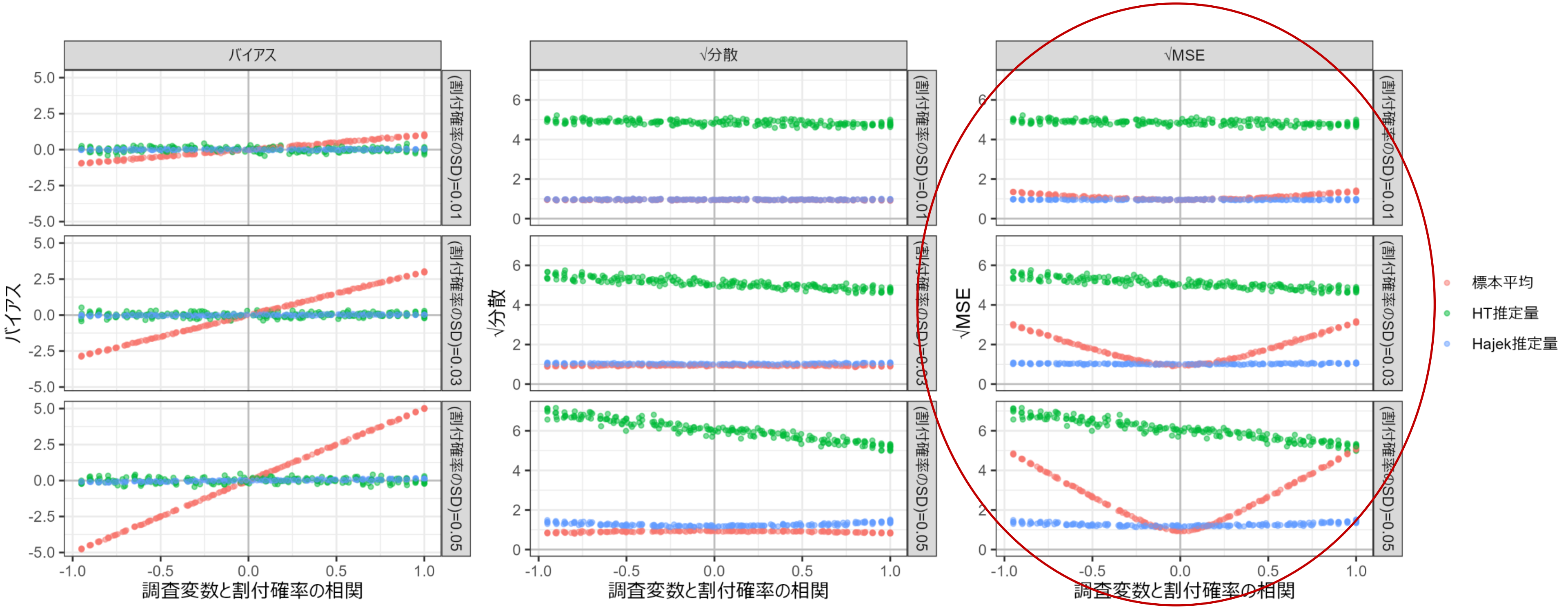
次に、推定量の分散についてみてみましょう。

- HT推定量は分散が非常に大きいです。
  - その理由のひとつは、ここで考えている問題(対象者割付)では割り付けされる対象者数が割付のたびに変動しているためです。別の問題(たとえば標本サイズを事前に固定した標本抽出)では異なる結果になるでしょう。
- Hajek推定量の分散は、標本平均に比べてわずかに大きくなります。
  - その差は、割付確率の分散が大きいときに大きくなります。



最後に、バイアスと分散を合わせた指標である、推定量の正確性(MSE)についてみてみましょう。

- HT推定量は正確性がとても低いです。
- 割付確率の分散が小さいければ、標本平均とHajek推定量は大差ありません。
- 割付確率の分散が大きいときには、ふつうHajek推定量のほうが正確です。ただし、調査変数と割付確率とのあいだに相関がない場合には、むしろ標本平均のほうが正確です。



まとめ

本章では、以下のことがわかりました。

- **割り付けられた対象者から得た値の集計には、バイアスが生じることがあります。**
  - 標本平均にバイアスが生じるのは、ある刺激の割付可能対象者のなかで、(1)その刺激への割付確率が対象者によって異なり、(2)割付確率と調査変数の間に相関があるときです。
  - (1) 割付確率のばらつきが大きいとき、バイアスが大きくなります。
  - (2) 割付確率と調査変数のあいだの相関が正ならば正のバイアスが、負ならば負のバイアスが生じます。
- **バイアスを取り除く方法があります。**
  - Hajek推定量 (割付確率の逆数を重みとした重み付き推定量) によって、バイアスを(ほぼ)取り除くことができます。
- **バイアスを取り除こうとすることには副作用があります。**
  - Hajek推定量の分散は、(1) 割付確率の分散が大きいときに大きくなります。
  - そのため、(1)割付確率の分散が大きく、(2) 割付確率と調査変数のあいだの相関が0に近いときには、Hajek推定量の正確性は、標本平均よりも低くなってしまうことがあります。

3. 対象者割付方法とその性質

この章では

この発表では、次の性質を持つ対象者割付について考えています。

- **各刺激について、刺激ごとに設定された条件を満たす人々の性質を調べたい**
- 各対象者を割り付ける刺激の数に上限を設けたい
- 各刺激について、目標とする割付人数を達成したい
- 調査対象者数をできるだけ減らしたい

これらのニーズを満たすため、私たちは割付方法をさまざまな形で工夫しています。そのため、調査実務で用いられる割付方法は多種多様です。

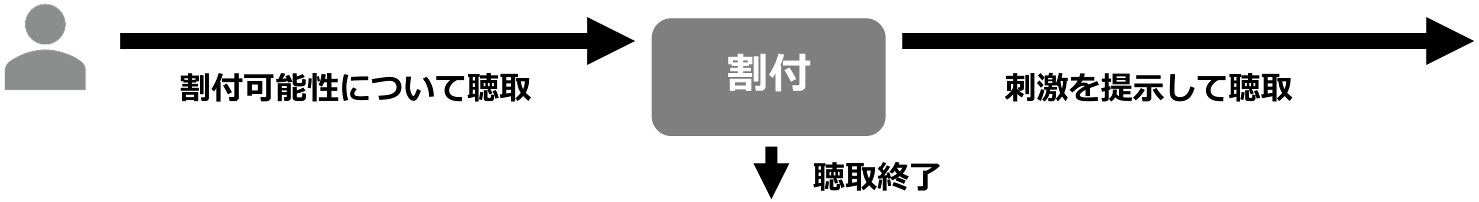
本章では、さまざまな割付方法を整理・分類するための枠組みを提案します。また、割付方法のおおまかな性質について検討します。

この章の設定

この章では、Web調査を想定し、次のように仮定します。

- 調査対象者の集合を所与の定数とみなします。
- 調査対象者は、調査に逐次的に参加します。
    - 調査参加順序は確率的現象であり、ありうるすべての調査参加順序が等しい確率で実現します。
    - 従って、調査参加順序は、対象者の刺激への割付可能性や調査変数の値とは独立です。

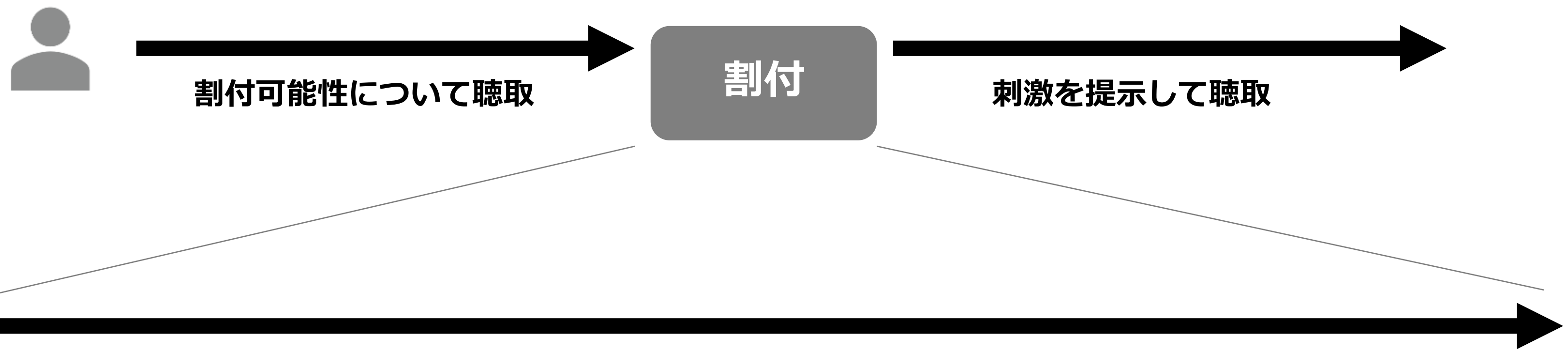
- 各対象者に対する聴取手続きは、次の3段階からなると考えます。
    1. 各刺激に対する割付可能性 (各刺激について設定された条件を満たすか) について聴取する
    2. その対象者を刺激に割り付ける
        - 各対象者について割付を行う際、それまでに調査に参加した調査対象者における割付結果や、事前に刺激に与えた値を参照することができます。
        - 刺激への割付を行わないこともできます。その場合、この対象者への聴取はここで終了となります
    3. 割り付けられた刺激を提示し、調査変数について聴取する



割付方法の分類枠組み

さまざまな割付方法を分類・整理するため、以下の枠組みを提案します。

- 各対象者の刺激への割付を、４つのステップからなる手順としてとらえます。



		Step 1.	Step 2.	Step 3.	Step 4.
		全ての刺激から条件に合致するものを選ぶ	Step 1. で選ばれた刺激を順序づけ、割付刺激数上限まで選ぶ	Step 2. で選ばれた刺激から条件に合致するものを選ぶ	Step 3. の結果に基づき、割付を行うかどうかを決める
使用する情報	その対象者の割付可能性	○		○	
	各刺激が目標未達か	○		○	○
	各刺激の不足数		○		
	事前に刺激に与えた値		○		

目標未達：その時点で、その刺激への割付対象者数が目標とする対象者数に到達していないこと
不足数：目標とする割付対象者数と、その時点での割付対象者数の差

Step 1.

- Step 2. のための刺激の候補集合を決める段階。
- その方法として以下が挙げられます。

Step 1.	
1A	すべての刺激
1B	割付可能刺激
1C	割付可能かつ目標未達の刺激
…	

Step 2.

- 刺激の候補集合から割付刺激数上限までを選ぶ段階。
- その方法として以下が挙げられます。
    - 2Bは1Aと併用できません。
    - 2E, 2Fは実際には用いられていないと思いますが、以後の説明のために含めています。

Step 1.	
1A	すべての刺激
1B	割付可能刺激
1C	割付可能かつ目標未達の刺激
…	

Step 2.	
2A	無作為に選ぶ
2B	あらかじめ刺激に与えられている順序に従って選ぶ
2C	その時点で目標未達の刺激から無作為に選び、割付刺激数上限に満たない場合は他の刺激から無作為に選ぶ
2D	不足数が大きい順に選ぶ
2E	事前に刺激に与えた値に比例した0以上の割付確率で選ぶ
2F	不足数に応じた0以上の割付確率を与えその確率で選ぶ
…	

Step 3.

- 選ばれた各刺激のなかから条件に合致する刺激を選ぶ段階。
- その方法として以下が挙げられます。

Step 1.	
1A	すべての刺激
1B	割付可能刺激
1C	割付可能かつ目標未達の刺激
…	

Step 2.	
2A	無作為に選ぶ
2B	あらかじめ刺激に与えられている順序に従って選ぶ
2C	その時点で目標未達の刺激から無作為に選び、割付刺激数上限に満たない場合は他の刺激から無作為に選ぶ
2D	不足数が大きい順に選ぶ
2E	事前に刺激に与えた値に比例した0以上の割付確率で選ぶ
2F	不足数に応じた0以上の割付確率を与えその確率で選ぶ
…	

Step 3.	
3A	割付可能刺激
3B	割付可能かつ目標未達の刺激
…	

Step 4.

- その対象者に割付を行うかどうかを改めて判断する段階。
    - 調査コスト削減の観点から、調査対象者数を減らすだけでなく、割付が行われる対象者の数を減らすことを求められることがあります。その場合、1個以上の割付刺激が決まった対象者についても、その対象者が目標への到達に貢献しない場合、あえて割付しない場合があります。
- その方法として以下が挙げられます。

Step 1.	
1A	すべての刺激
1B	割付可能刺激
1C	割付可能かつ目標未達の刺激
…	

Step 2.	
2A	無作為に選ぶ
2B	あらかじめ刺激に与えられている順序に従って選ぶ
2C	その時点で目標未達の刺激から無作為に選び、割付刺激数上限に満たない場合は他の刺激から無作為に選ぶ
2D	不足数が大きい順に選ぶ
2E	事前に刺激に与えた値に比例した0以上の割付確率で選ぶ
2F	不足数に応じた0以上の割付確率を与えその確率で選ぶ
…	

Step 3.	
3A	割付可能刺激
3B	割付可能かつ目標未達の刺激
…	

Step 4.	
4A	1個以上の割付刺激が選ばれたすべての対象者について割付を行う
4B	目標未達刺激を含む1個以上の割付刺激が選ばれた対象者について割付を行う
…	

前章で取り上げた割付方法を、この枠組みによって記述してみましょう。

	Step 1. 全ての刺激から条件に合致するものを選ぶ	Step 2. Step 1. で選ばれた刺激を順序づけ、割付刺激数上限まで選ぶ	Step 3. Step 2. で選ばれた刺激から条件に合致するものを選ぶ	Step 4. Step 3. の結果に基づき、割付を行うかどうかを決める
例1. ブランドをひとつ等確率に選び、対象者がそのブランドを知っていたらそれについて聴取する	1A. すべての刺激	2A. 無作為に選ぶ	3A. 割付可能刺激	4A. 1個以上の割付刺激が選ばれたすべての対象者について割付を行う
例2. 対象者がAを知っていたらAについて、Aを知らずBを知っていたらBについて、A,Bを知らずCを知っていたらCについて聴取する	1B. 割付可能刺激	2B. あらかじめ刺激に与えられている順序に従って選ぶ	3A. 割付可能刺激	4A. 1個以上の割付刺激が選ばれたすべての対象者について割付を行う
例3. 対象者が知っているブランドのなかからひとつを等確率に選んで聴取する	1B. 割付可能刺激	2A. 無作為に選ぶ	3A. 割付可能刺激	4A. 1個以上の割付刺激が選ばれたすべての対象者について割付を行う
例4.「対象者が調査に参加した時点で聴取者数が目標に達しておらず、かつその対象者が知っているブランド」のなかからひとつを等確率に選んで聴取する	1C.割付可能かつ目標未達の刺激	2A. 無作為に選ぶ	−	−
参考: 某社の某調査	1B. 割付可能刺激	2D.不足数が大きい順に選ぶ	3A. 割付可能刺激	4B. 目標未達刺激を含む1個以上の割付刺激が選ばれた対象者について割付を行う

すべての組み合わせを下表に示します。

Step 1.	Step 2.	Step 3.	Step 4.	効率性のレベル	バイアスが生じない	割付確率は既知	二段抽出法の二段目としてみたとき
A. すべての刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
	C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	低	○		
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
	E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
B. 割付可能刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	中		○	無作為抽出
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
	B. 所与の順序	A. 割付可能	A. すべて	中		○	
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
	C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	高			
			B. 目標未達刺激あり	高			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	高			
	E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	中		○	確率比例抽出(2Eの場合)
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
C. 割付可能かつ目標未達の刺激	A. 無作為	–	–	高			
	B. 所与の順序	–	–	高			
	C.,D. 目標未達刺激を優先	–	–	高			
	E.,F. 割付確率を算出	–	–	高		○	

割付方法と効率性

これらの割付方法は、調査対象者数の少なさの観点からは、おおまかに次の3レベルに分類することができます。

- **高**: 各対象者の割付刺激が、割付可能かつ目標未達の刺激から上限まで選ばれている方法
- **中**: 各対象者の割付刺激が、割付可能刺激から上限まで選ばれている方法 (上記を除く)
- **低**: 上記以外の方法

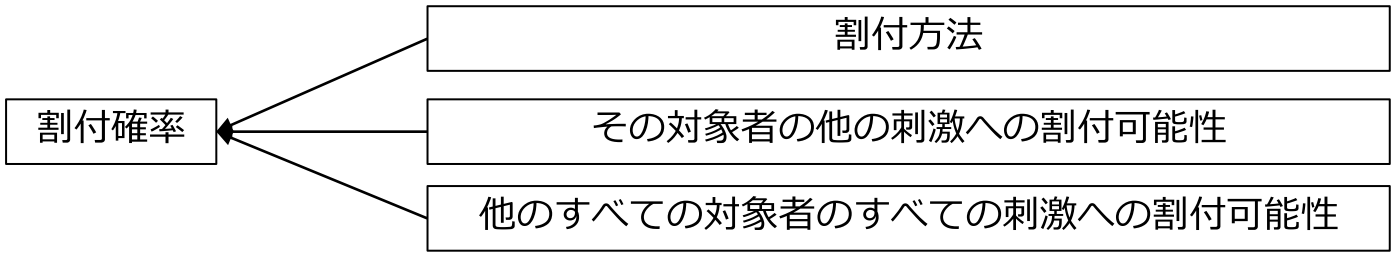
Step 1.	Step 2.	Step 3.	Step 4.	効率性のレベル	バイアスが生じない	割付確率は既知	二段抽出法の二段目としてみたとき
A. すべての刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
	C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	低	○		
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
	E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
B. 割付可能刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	中		○	無作為抽出
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
	B. 所与の順序	A. 割付可能	A. すべて	中		○	
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
	C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	高			
			B. 目標未達刺激あり	高			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	高			
	E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	中		○	確率比例抽出(2Eの場合)
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
C. 割付可能かつ目標未達の刺激	A. 無作為	–	–	高			
	B. 所与の順序	–	–	高			
	C.,D. 目標未達刺激を優先	–	–	高			
	E.,F. 割付確率を算出	–	–	高		○	

割付方法とバイアス

次に、これらの割付方法によって引き起こされるバイアスについて考えてみます。

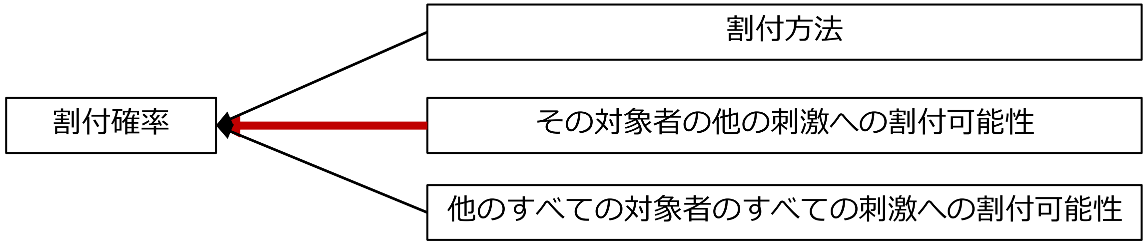
ここでは、割付方法と調査対象者の(順序のない)集合は所与の定数であり、対象者の調査参加順序は未知の確率的現象であると考えています。
この観点からみた割付確率(割付方法と調査対象者の集合のもとでの割付確率)は、次の３つの要因によって決まります。

- 割付方法
  - 刺激数、アルゴリズム、目標割付対象者数、割付刺激数上限を含みます。
- その対象者の他の刺激への割付可能性
- 他のすべての対象者の、すべての刺激への割付可能性



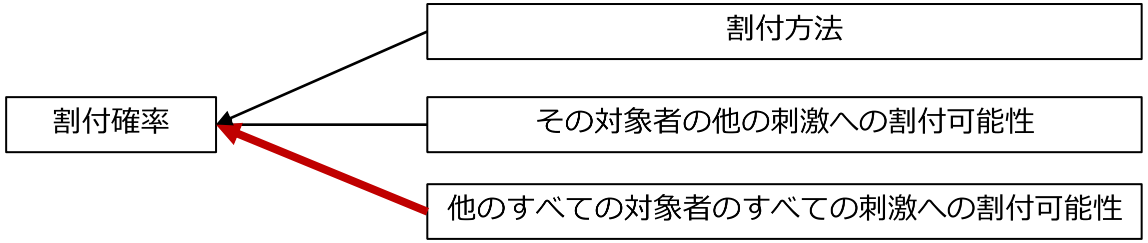
バイアスの観点から見たとき、割付方法は次の2つの性質を持ちます。

- **割付によってバイアスは生じるか**
  - バイアスは、ある刺激に対する割付確率がその刺激の割付可能対象者のあいだで異なるときに生じます。すなわち、**バイアスは割付確率が「その対象者の他の刺激への割付可能性」に依存しているときに生じます。**



Step 1.	Step 2.	Step 3.	Step 4.	効率性のレベル	バイアスが生じない	割付確率は既知	二段抽出法の二段目としてみたとき
A. すべての刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
	C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	低	○		
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
	E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
B. 割付可能刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	中		○	無作為抽出
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
	B. 所与の順序	A. 割付可能	A. すべて	中		○	
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
	C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	高			
			B. 目標未達刺激あり	高			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	高			
	E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	中		○	確率比例抽出(2Eの場合)
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
C. 割付可能かつ目標未達の刺激	A. 無作為	–	–	高			
	B. 所与の順序	–	–	高			
	C.,D. 目標未達刺激を優先	–	–	高			
	E.,F. 割付確率を算出	–	–	高		○	

- **割付確率は既知か**
  - **割付確率が「他の対象者の割付可能性」に依存していなければ、 割付確率は自明です。**
    - たとえば1B-2A-3A-4Aでは、割付確率は1/(割付可能刺激数) です。
  - また、割付の際に割付確率を算出しそれに従っている場合には、 (調査参加順序を所与とした)割付確率が既知です。



Step 1.	Step 2.	Step 3.	Step 4.	効率性のレベル	バイアスが生じない	割付確率は既知	二段抽出法の二段目としてみたとき
A. すべての刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
	C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	低	○		
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
	E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
B. 割付可能刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	中		○	無作為抽出
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
	B. 所与の順序	A. 割付可能	A. すべて	中		○	
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
	C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	高			
			B. 目標未達刺激あり	高			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	高			
	E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	中		○	確率比例抽出(2Eの場合)
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
C. 割付可能かつ目標未達の刺激	A. 無作為	–	–	高			
	B. 所与の順序	–	–	高			
	C.,D. 目標未達刺激を優先	–	–	高			
	E.,F. 割付確率を算出	–	–	高		○	

バイアスを取り除けるか

割付確率が既知の手法では、バイアスを取り除けるのでしょうか。

また、割付確率が未知である手法では、割付確率をなんらかの方法で推測できたなら、バイアスを取り除けるのでしょうか。

バイアスを取り除くためには、すべての対象者と割付可能刺激の組み合わせにおいて、割付確率が0より大きくなければなりません。

割付確率が常に0より大きくなるかどうかは、手法と割付可能性の分布に依存します。

- 割付確率が既知である手法の場合、その判断は比較的に容易です。
  - 1B-2Bを使用する手法 (対象者のすべての割付可能刺激のなかから、あらかじめ与えられた順序で上限個までの刺激を選ぶ)
    - たとえばある対象者が、刺激1, 2, 3に対して割付可能であり、刺激にあらかじめ与えられた順序は(1,2,3)であり、割付刺激数上限は2であるとしましょう。このとき、刺激1,2,3への割付確率は1, 1, 0です。従って、標本に「刺激1, 2, 3に対して割付可能な対象者」が含まれるとき、バイアスは取り除けないことになります。
    - このようにこの手法では、多くの場合、バイアスを取り除けません。
  - 他の手法
    - バイアスを取り除けます。
- 割付確率が未知である手法の場合、その判断は困難です。

標本抽出との関係

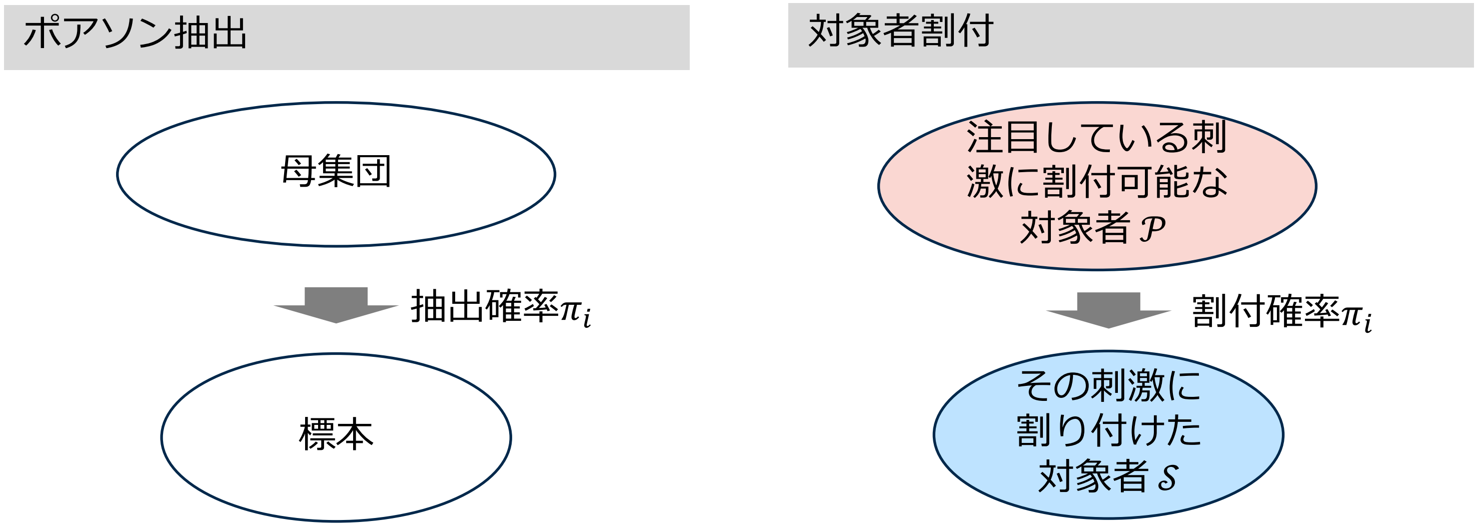
ところで、この章で扱った割付方法は、一般的な標本抽出とはどのような関係にあるでしょうか。

ふたつの捉え方ができます。

ポアソン抽出としての割付

前章と同じく、ある刺激の割付可能対象者と割り付けられた対象者との関係を、母集団と標本の関係として捉えることができます。

この章で扱った割付方法では、割付可能対象者は互いに独立に、割付確率π_iでその刺激に割り付けられます。このような性質を持つ標本抽出は**ポアソン抽出**と呼ばれています(Sarndal, Swensson, & Wretman, 1992)。



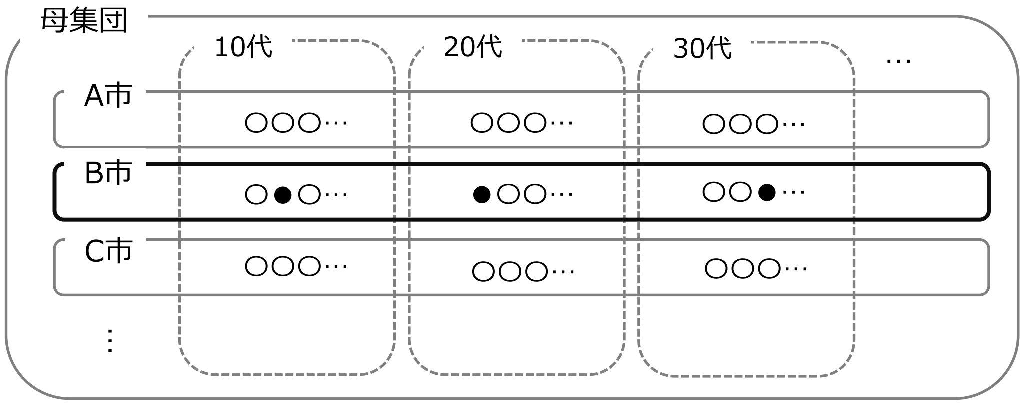
二段抽出としての割付

ここで扱う対象者割付は、標本抽出でいう二段抽出の二段目として捉えることもできます (Tille, 2006)。

この観点からみると、ここで扱う対象者割付は次の特徴を持っています。

- 一次抽出要素とクロスする層があり、一次抽出要素と層の組み合わせについて、二次抽出要素は0個か1個
- 母集団全体の性質ではなく、各層の性質に関心を持っている

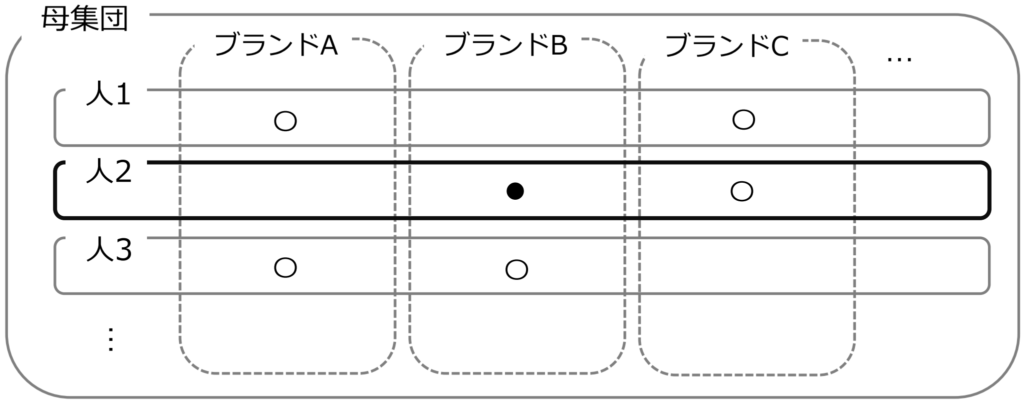
二段抽出



○: 住民
●: 抽出された住民

- 一段目の抽出
  - なんらかの抽出デザインにより、自治体を抽出する
- 二段目の抽出
  - 抽出された自治体のそれぞれにおいて、住民を抽出する

対象者割付



○: その人が知っているブランド
●: その人が割り付けられたブランド

- 調査対象者の抽出
  - なんらかの抽出デザインにより調査対象者を抽出する
- ブランドへの割付
  - 抽出された対象者を、いくつかのブランドに割り付ける

この観点からは、

- 1B-2A-3A-4Aは、二段抽出法の二段目において無作為抽出を用いていると捉えることができます。
- 1B-2E-3A-4Aは、二段抽出法の二段目において確率比例抽出を用いていると捉えることができます。

Step 1.	Step 2.	Step 3.	Step 4.	効率性のレベル	バイアスが生じない	割付確率は既知	二段抽出法の二段目としてみたとき
A. すべての刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
	C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	低	○		
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
	E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
B. 割付可能刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	中		○	無作為抽出
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
	B. 所与の順序	A. 割付可能	A. すべて	中		○	
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
	C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	高			
			B. 目標未達刺激あり	高			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	高			
	E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	中		○	確率比例抽出(2Eの場合)
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
C. 割付可能かつ目標未達の刺激	A. 無作為	–	–	高			
	B. 所与の順序	–	–	高			
	C.,D. 目標未達刺激を優先	–	–	高			
	E.,F. 割付確率を算出	–	–	高		○	

まとめ

この章では、さまざまな割付方法を整理・分類する枠組みを提案し、割付方法のおおまかな性質について考えました。

この枠組みは、これから行う調査について計画している際、用いる割付方法を決める手助けになります。すなわち、次のことがわかります。

- 効率がよさそうな割付方法は？
- バイアスが生じない割付方法は？
- バイアスを容易に取り除けそうな割付方法は？

いっぽう、効率性やバイアスを定量的に評価するためには、この枠組みだけでは不十分です。その方法を5章から7章で検討します。

４. 割付確率の推定

この章では

前章では、さまざまな割付方法を分類・整理する枠組みを提案しました。

この枠組みがカバーしている割付方法の多くにおいて、バイアスが生じ、しかも割付確率が未知です。そのため、集計の際にバイアスを取り除くことが困難です。

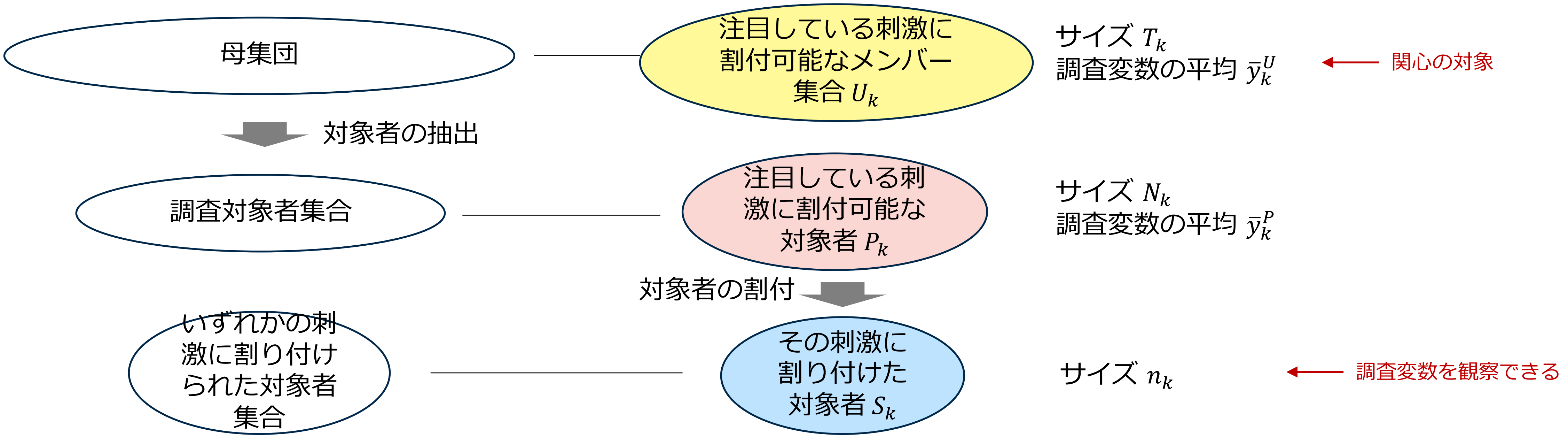
本章では、すでに行った調査について、調査対象者の各刺激への割付確率を推定する方法を提案します。

Step 1.	Step 2.	Step 3.	Step 4.	効率性のレベル	バイアスが生じない	割付確率は既知	二段抽出法の二段目としてみたとき
A. すべての刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
	C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	低	○		
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
	E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
B. 割付可能刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	中		○	無作為抽出
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
	B. 所与の順序	A. 割付可能	A. すべて	中		○	
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
	C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	高			
			B. 目標未達刺激あり	高			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	高			
	E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	中		○	確率比例抽出(2Eの場合)
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
C. 割付可能かつ目標未達の刺激	A. 無作為	–	–	高			
	B. 所与の順序	–	–	高			
	C.,D. 目標未達刺激を優先	–	–	高			
	E.,F. 割付確率を算出	–	–	高		○	

4章～7章の設定

次のように仮定します。

- なんらかの母集団が存在し、調査対象者はそこからの無作為標本であると考えます。
- 調査対象者集合のサイズはあらかじめ固定されていると考えます。
- 調査対象者は、調査に逐次的に参加します。
  - 調査参加順序は確率的現象であり、ありうるすべての調査参加順序が等しい確率で実現します。
- 関心の対象は、母集団のうち刺激kに割付可能なメンバーの集合U_k (サイズT_k)の、調査変数の平均$\bar{y}_k^U$であると考えます。



提案手法

すでに行った調査における割付確率を推定する方法として、次の方法 (**再割付シミュレーション**) を提案します。

- Step 1. 調査対象者集合から対象者を抽出して同じサイズの新たな調査対象者集合を作り、すでに行った調査と同じ方法で割付を行います。
  - 次の2つのバージョンがあります。
  - 母集団を所与とした割付確率の推定量$\hat{\pi}_{ik}^{u}$を得る場合: 調査対象者集合から対象者を**復元無作為抽出**する
  - 調査対象者集合を所与とした割付確率の推定量$\hat{\pi}_{ik}^{P}$を得る場合: 調査対象者集合の**調査参加順序を無作為に並び替える**
- Step 2. Step 1.をM回反復します。Mは十分に大きな値とします。
  - 試行mにおいて調査対象者 i が新たな調査対象者集合に含まれたら、含まれた回数をn_i^m、そのうち割付可能刺激kに割り付けられた回数をa_{ik}^mとして、$I_{ik}^{*m} = a_{ik}^m / n_i^m$とします。
- Step 3. 割付確率を推定します。
  - iが調査対象者集合に含まれた試行番号の集合をL、そのサイズをM'として

$$\hat{\pi}_{ik} = \frac{1}{M'} \sum_{m \in L} I_{ik}^{*m}$$

  - 同時にその分散V_{ik}を推定します。

$$\hat{V}_{ik} = \left(\frac{1}{M' - 1} \sum_{m \in L} (I_{ik}^{*m} - \hat{\pi}_{ik})^2 \right) / M'$$

詳細はAppendix C.をご覧ください。

標本抽出との関係

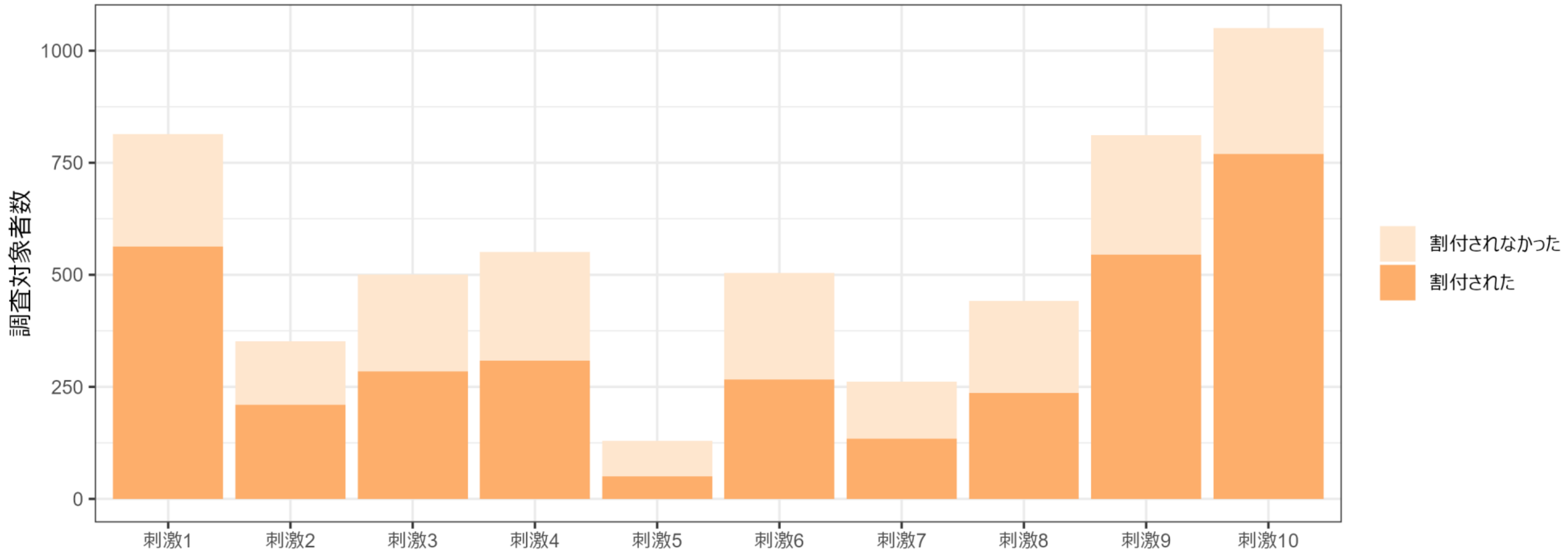
本章で提案した方法は、標本抽出の分野における以下の提案と類似しています。

- Fattorini (2006)
    - 複雑な標本抽出デザインにおいて、包含確率・同時包含確率を解析的に導出できないとき、それらを経験的に推定する方法を提案している。
    - 枠母集団からの抽出を反復し、包含確率・同時包含確率を経験的に推定する。
    - 系統的抽出についての適用例を示している。
- Thompson & Wu (2008)
    - Fattorini(2006)と同様。
    - 回答拒否者の代替を通なう多段抽出に対する適用例を示している。

数値例

例として、次の調査で得られたデータを用います。

- 刺激数: 10
- 割付方法: 1B-2A-3A-4A. すなわち、割付可能な刺激の中から等確率に上限数まで選んで割り付ける。
- 割付刺激数上限: 3
- 対象者数: 2500人
- 目標割付対象者数: (この割付方法では意味がない)



$\hat{\pi}_{ik}^{U}$と$\hat{\pi}_{ik}^{P}$を求めました。いずれも$M = 2000$としました。推定された割付確率を示します。

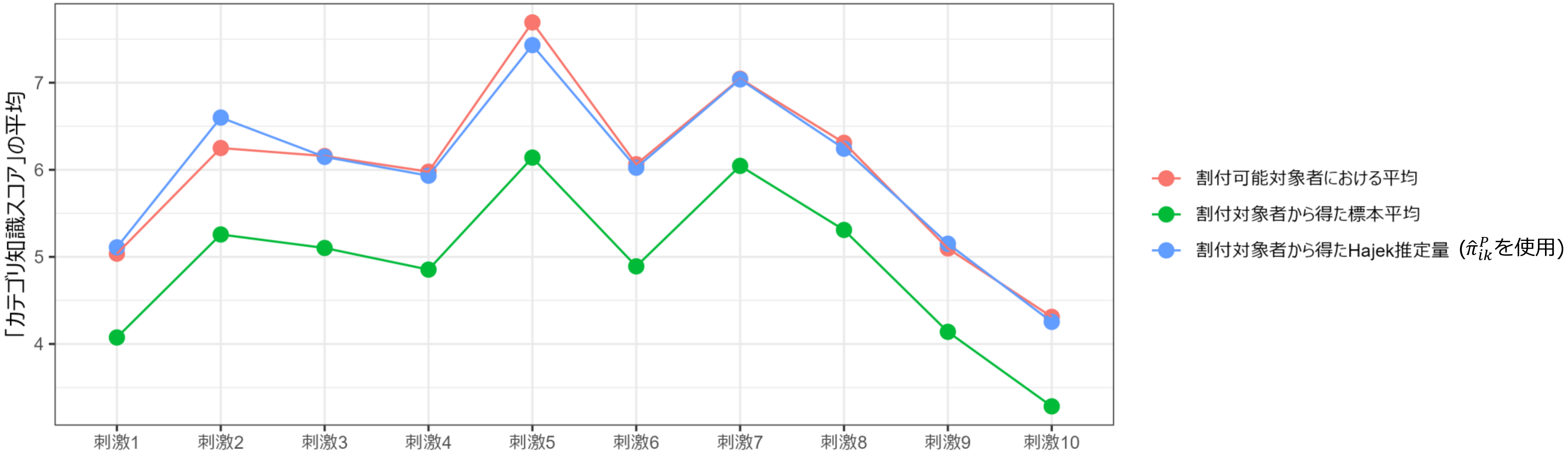
この割付方法では割付が他の対象者の割付可能性に依存していないので割付確率は自明です(1/(割付可能刺激数) となるはずです)。シミュレーションによって推定する意味はあまりありませんが、真の割付確率に近い値が得られていることがわかります。

調査対象者	割付可能性と割付結果(1:割付可能だが割り付けられなかった, 2:割り付けられた)										割付確率の推定値 (母集団を所与とする)										割付確率の推定値 (調査対象者集合を所与とする)									
	刺激1	刺激2	刺激3	刺激4	刺激5	刺激6	刺激7	刺激8	刺激9	刺激10	刺激1	刺激2	刺激3	刺激4	刺激5	刺激6	刺激7	刺激8	刺激9	刺激10	刺激1	刺激2	刺激3	刺激4	刺激5	刺激6	刺激7	刺激8	刺激9	刺激10
1																														
2									2										1.00										1.00	
3				2						2				1.00						1.00				1.00						1.00
4																														
5																														
6	2	1		1				1	2	2	0.50	0.48		0.52				0.51	0.49	0.50	0.53	0.49		0.50				0.48	0.51	0.50
7									2										1.00										1.00	
8																														
9																														
10																														
11										2										1.00										1.00
12																														
13	2							2			1.00							1.00			1.00							1.00		
14									2	2									1.00	1.00									1.00	1.00
15																														
16																														
17																														
18																														
19									2										1.00										1.00	
20		2										1.00										1.00								
21																														
22																														
23																														
24																														
25																														
26																														
27																														
28	2										1.00										1.00									
29																														
30																														
31							2			2							1.00			1.00							1.00			1.00
32																														
33																														
34	1		1	1		1		2	2	2	0.40		0.45	0.44		0.44		0.44	0.41	0.43	0.43		0.42	0.43		0.41		0.45	0.45	0.42
35	2		1	2	1			2	1	1	0.44		0.44	0.45	0.44			0.41	0.41	0.42	0.47		0.42	0.40	0.44			0.43	0.43	0.43
36	2		2	1		1				2	0.62		0.59	0.57		0.61				0.60	0.62		0.62	0.56		0.60				0.60
37																														
38		2										1.00										1.00								

推定した割付確率を使った推定の様子を示します。

- 便宜的に、割付可能かどうかをブランド認知と見立て、ある人の割付可能刺激数を「カテゴリ知識スコア」と呼ぶことにしましょう。
- 私たちは、各刺激に割付可能な対象者の「カテゴリ知識スコア」の平均に関心があるものとします。ここではすべての調査対象者について「カテゴリ知識スコア」が既知です。しかし、仮に各刺激に割り付けられた対象者についてしかこの変数を測定できないとしましょう。
- その標本平均は著しいバイアスを受けます(「カテゴリ知識スコア」が高い人は各ブランドへの割付確率が低いためです)。しかし、割付確率の推定値を用いて、Hajek推定量によってバイアスを(ほぼ)取り除くことができるはずです。

下に推定結果を示します。かなり正確な推定が得られています。



まとめ

この章では、割付確率が未知である割付手法を使って調査を行った際、割付確率を事後的に推定する方法を提案しました。

5. 対象者割付方法の効率性の評価

この章では

3章では、さまざまな割付方法の効率性について、おおまかな検討を行いました。

本章では、<u>これから行う調査</u>について計画している際に、割付方法の効率性を定量的に評価する方法を提案します。

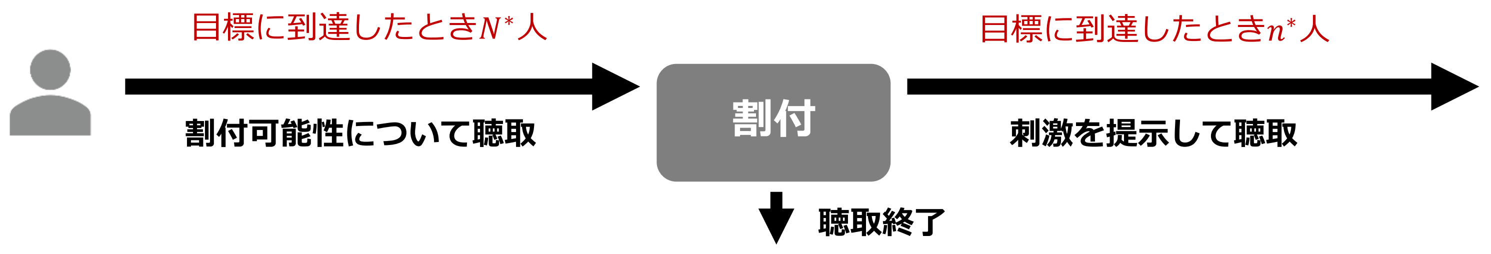
Step 1.	Step 2.	Step 3.	Step 4.	効率性のレベル	バイアスが生じない	割付確率は既知	二段抽出法の二段目としてみたとき
A. すべての刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
	C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	低	○		
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
	E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
B. 割付可能刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	中		○	無作為抽出
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
	B. 所与の順序	A. 割付可能	A. すべて	中		○	
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
	C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	高			
			B. 目標未達刺激あり	高			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	高			
	E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	中		○	確率比例抽出(2Eの場合)
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
C. 割付可能かつ目標未達の刺激	A. 無作為	–	–	高			
	B. 所与の順序	–	–	高			
	C.,D. 目標未達刺激を優先	–	–	高			
	E.,F. 割付確率を算出	–	–	高		○	

効率性の指標

割付方法の効率性の指標として、次の2つを用います。

- **目標到達時調査対象者数 N^***
    - 調査対象者に対して逐次的に割付を行ったとき、いずれの刺激でも目標割付対象者数に到達するために必要であった調査対象者数。
- **目標到達時割付対象者数 n^***
    - 調査対象者に対して逐次的に割付を行い、各刺激に割り付けられた対象者数がいずれの刺激でも目標に到達したときの、刺激に割り付けられた調査対象者数。

割付可能性の聴取をスクリーニング調査、割付刺激についての聴取を本調査で行う場合は、前者がスクリーニング調査対象者数、後者が本調査対象者数に相当します。



提案手法

割付方法の効率性を評価する手法として、以下の方法 (**割付シミュレーション**) を提案します。

- Step 1. 架空の母集団を作成します。
    - 母集団についての仮定を、仮想的な有限母集団の割付可能性のデータとして表現します(下図)。
    - 母集団データの作成方法としては以下が考えられます。
        - これから行う調査と類似した過去の調査データを加工して作る
        - パイロット調査を行う
- Step 2. 母集団から対象者を逐次的に復元無作為抽出し、検討したい割付方法を用いて、すべての刺激において割付対象者が目標に到達するまで続け、N^*, n^*を記録します。
- Step 3. Step 2. を十分な回数繰り返し、N^*, n^*の経験分布を得ます。

刺激1	刺激2	刺激3	刺激4	刺激5	刺激6	刺激7	刺激8	…
1	0	1	0	1	1	1	1	…
0	1	0	0	1	1	1	0	…
0	0	0	0	1	0	0	1	…
1	0	1	0	1	1	1	1	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…
0	0	0	0	1	0	0	1	…

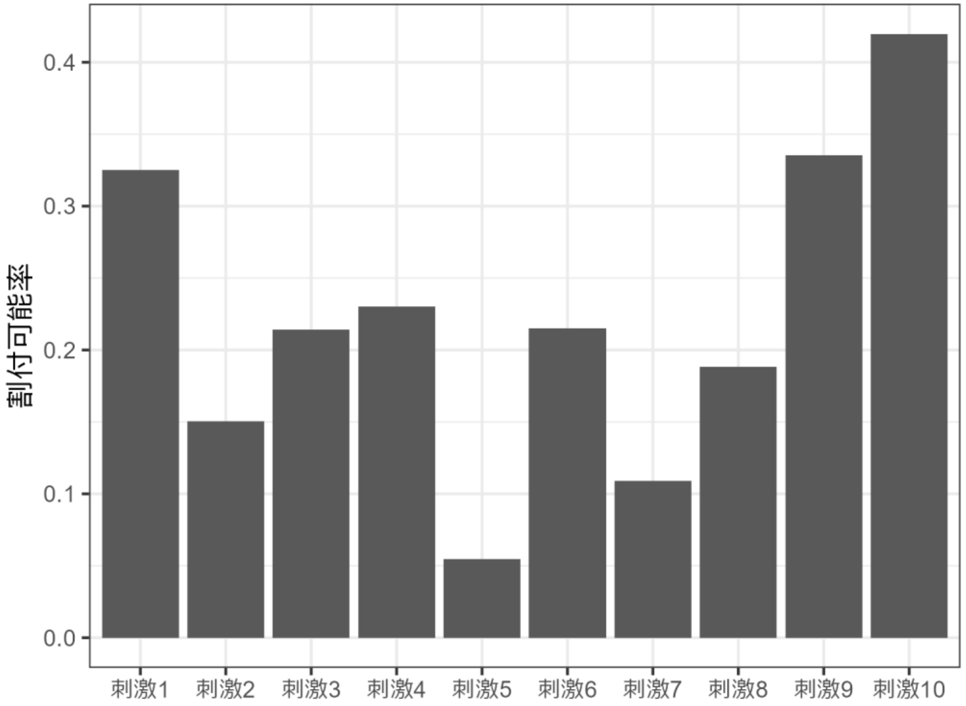
母集団データのイメージ。行は人、値1は割付可能、0は割付不能を表す

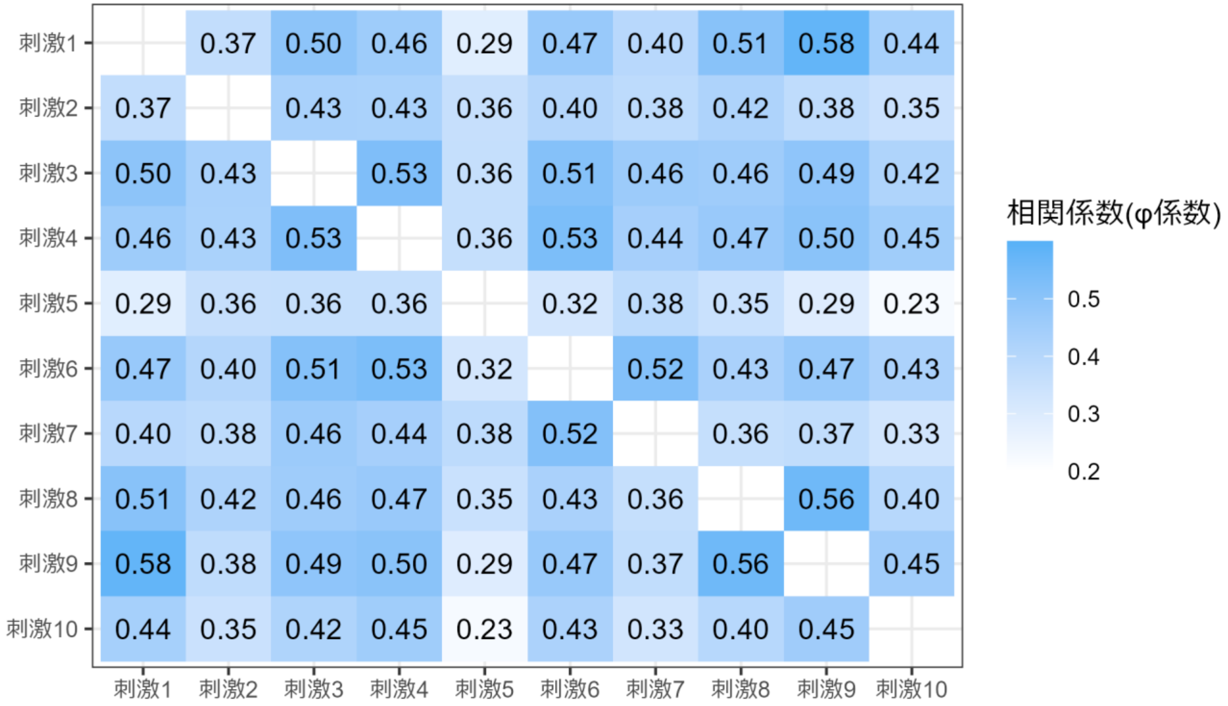
数値例

次の母集団データを用います。

- 刺激数: 10
- 行数:　9326

各刺激に対する割付可能率と、割付可能性の相関行列を示します。





割付方法を以下のように設定します。

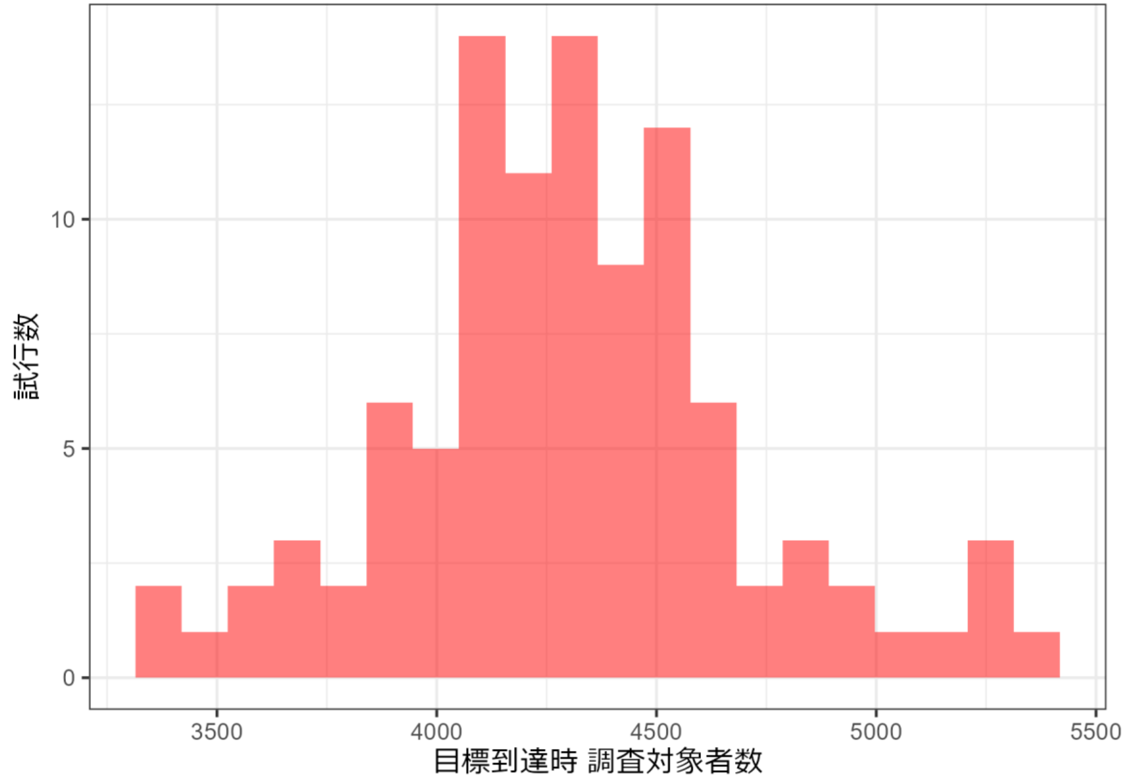
- 割付方法: 以下の6種類を比べます。
    1. 1A-2A-3A-4A. すべての刺激の中から等確率に上限数まで選び、割付可能な刺激に割り付ける。
    2. 1A-2C-3A-4A.すべての刺激の中から目標未達の刺激を優先して上限数まで選び、割付可能な刺激に割り付ける。
    3. 1A-2D-3A-4A.すべての刺激の中から目標不足数の大きい刺激を優先して上限数まで選び、割付可能な刺激に割り付ける。
    4. 1B-2A-3A-4A. 割付可能な刺激の中から等確率に上限数まで選んで割り付ける。
    5. 1B-2C-3A-4A. 割付可能な刺激の中から目標未達の刺激を優先して上限数まで選んで割り付ける。
    6. 1B-2D-3A-4A. 割付可能な刺激の中から目標不足数の大きい刺激を優先して上限数まで選んで割り付ける。
- 割付刺激数上限:　3
- 目標割付人数:　各刺激について100人

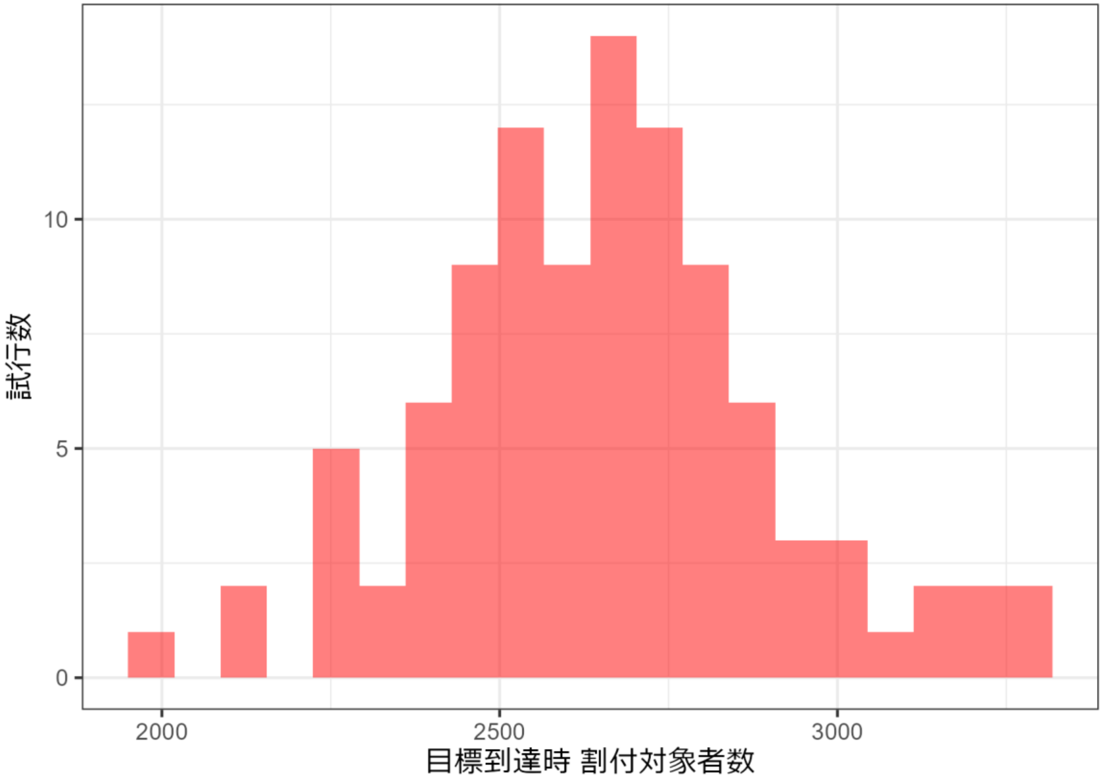
試行数100の結果を示します。

	Step 1.	Step 2.	Step 3.	Step 4.	効率性のレベル	バイアスが生じない	割付確率は既知	二段抽出法の二段目としてみたとき
1	A. すべての刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
				B. 目標未達刺激あり	低			
			B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
2,3		C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	低	○		
				B. 目標未達刺激あり	低			
			B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
		E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
				B. 目標未達刺激あり	低			
			B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
4	B. 割付可能刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	中		○	無作為抽出
				B. 目標未達刺激あり	中			
			B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
		B. 所与の順序	A. 割付可能	A. すべて	中		○	
				B. 目標未達刺激あり	中			
			B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
5,6		C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	高			
				B. 目標未達刺激あり	高			
			B. 割付可能かつ目標未達	–	高			
		E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	中		○	確率比例抽出(2Eの場合)
				B. 目標未達刺激あり	中			
			B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
	C. 割付可能かつ目標未達の刺激	A. 無作為	–	–	高			
		B. 所与の順序	–	–	高			
		C.,D. 目標未達刺激を優先	–	–	高			
		E.,F. 割付確率を算出	–	–	高		○	

割付方法4. (1B-2A-3A-4A. 割付可能な刺激の中から等確率に上限数まで選んで割り付ける) の結果を示します。

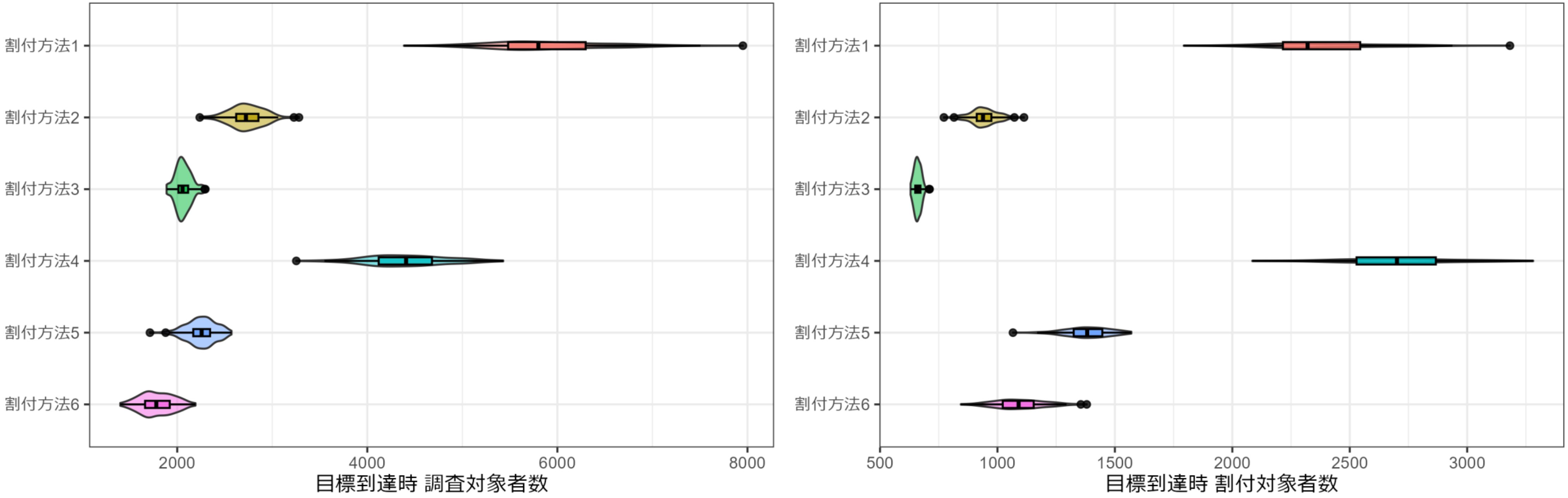
- ほとんどの場合、4700人程度の対象者を確保すれば、すべての刺激について目標割付人数を得ることができるようですが、ときにはもっと必要になることもあるようです。





6つの方法を比べてみましょう。

- 3章で検討したように、(調査対象者数における)効率性は、方法1,2,3より方法4,5,6のほうが高いことが確認できます。
    - いっぽう、前者はバイアスが生じる方法、後者はバイアスが生じない方法です。
- 方法1は、必要な調査対象者数が試行間で大きくばらついています。非常にリスキーな割付方法といえるでしょう。
- 意外なことに、方法2,3はバイアスが生じないだけでなく、効率性の面でも方法5,6に匹敵しています。この母集団の場合、割付方法5,6を使い推定時にバイアスを取り除くより、割付方法2,3を使ったほうがよさそうです。



まとめ

この章では、これから行う調査について計画している際に、割付方法の効率性を定量的に評価する方法を提案しました。

6. 対象者割付によって生じるバイアスの大きさの評価

この章では

本章では、<u>これから行う調査</u>について計画している際に、割付方法のもとで生じるであろうバイアスの大きさを定量的に評価する方法を提案します。

Step 1.	Step 2.	Step 3.	Step 4.	効率性のレベル	バイアスが生じない	割付確率は既知	二段抽出法の二段目としてみたとき
A. すべての刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
	C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	低	○		
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
	E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
B. 割付可能刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	中		○	無作為抽出
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
	B. 所与の順序	A. 割付可能	A. すべて	中		○	
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
	C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	高			
			B. 目標未達刺激あり	高			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	高			
	E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	中		○	確率比例抽出(2Eの場合)
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
C. 割付可能かつ目標未達の刺激	A. 無作為	–	–	高			
	B. 所与の順序	–	–	高			
	C.,D. 目標未達刺激を優先	–	–	高			
	E.,F. 割付確率を算出	–	–	高		○	

バイアスの大きさの指標

2章では、割付によって調査変数の標本平均に生じるバイアスの大きさを、次のように近似できることを示しました。

$$Bias\left(\hat{\bar{y}}_{simple}, \bar{y}\right) = Corr(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{y}) \times \frac{SD(\boldsymbol{\pi})}{\bar{\pi}} \times SD(\boldsymbol{y})$$

また、π_{ik}ないしその推定値を得ることによってバイアスを取り除けること、しかし$SD(\boldsymbol{\pi})$が大きいときには、バイアスを取り除こうとすることによって推定量の分散が大きくなることを示しました。

以上を踏まえ、バイアスの大きさを評価するための指標として、次の２つを提案します。

- **スケーリングした割付確率の推定値と割付可能レシオとの共分散** $Cov(\hat{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{r})$
  - この指標は、架空の調査変数(刺激数に占める対象者の割付可能刺激数の割合)において生じるバイアスを推定したものです。
  - 「割付に伴って大きな負のバイアスが生じそうな調査変数におけるバイアスの推定値」と解釈できます。
- **割付確率の変動係数の推定値** $\widehat{CV}(\boldsymbol{\pi})$
  - この指標は、バイアスのうち$\frac{SD(\boldsymbol{\pi})}{\bar{\boldsymbol{\pi}}}$の部分を推定したものです。
  - 「割付に伴うバイアスを取り除こうとしたとき推定量の分散が大きくなる程度」と解釈できます。

詳細はAppendix D.をご覧ください。

提案手法

割付方法によって生じるバイアスの大きさを評価する手法として、以下の方法 (**割付・再割付シミュレーション**) を提案します。

- Step 1. 5章と同様に、架空の母集団を作成します。
- Step 2. 5章と同様に、母集団から復元無作為抽出を行い、割付を行うべき調査対象者集合を得ます。
- Step 3. 4章と同様に、この調査対象者集合からの再割付を繰り返し、割付確率を推定し、 $Cov(\hat{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{r})$と$\widehat{CV}(\boldsymbol{\pi})$を求めます。
- Step 4. Step 2-3. を十分な回数繰り返し、 $Cov(\hat{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{r})$と$\widehat{CV}(\boldsymbol{\pi})$の経験分布を得ます。

INSIGHT FACTORY

数値例

5章と同じ母集団を使用します。調査対象者数を3000人とします。

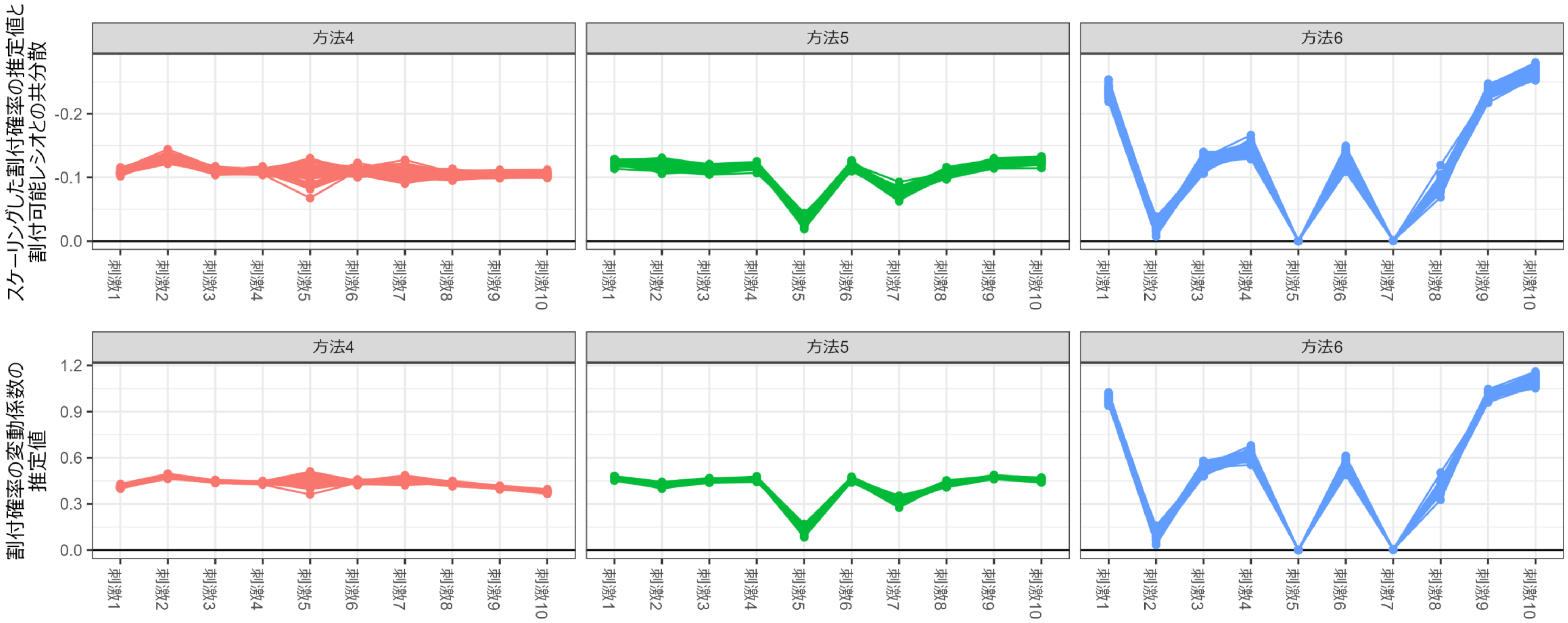
割付方法を以下のように設定します。

- 割付方法: 前章で取り上げた6種類のうち、以下の3種類を比べます。
    4. 1B-2A-3A-4A. 割付可能な刺激の中から等確率に上限数まで選んで割り付ける。
    5. 1B-2C-3A-4A. 割付可能な刺激の中から目標未達の刺激を優先して上限数まで選んで割り付ける。
    6. 1B-2D-3A-4A. 割付可能な刺激の中から目標不足数の大きい刺激を優先して上限数まで選んで割り付ける。
- 割付刺激数上限: 3
- 目標割付人数: 各刺激について100人

割付試行数50、各割付試行における再割付試行数500の結果を示します。

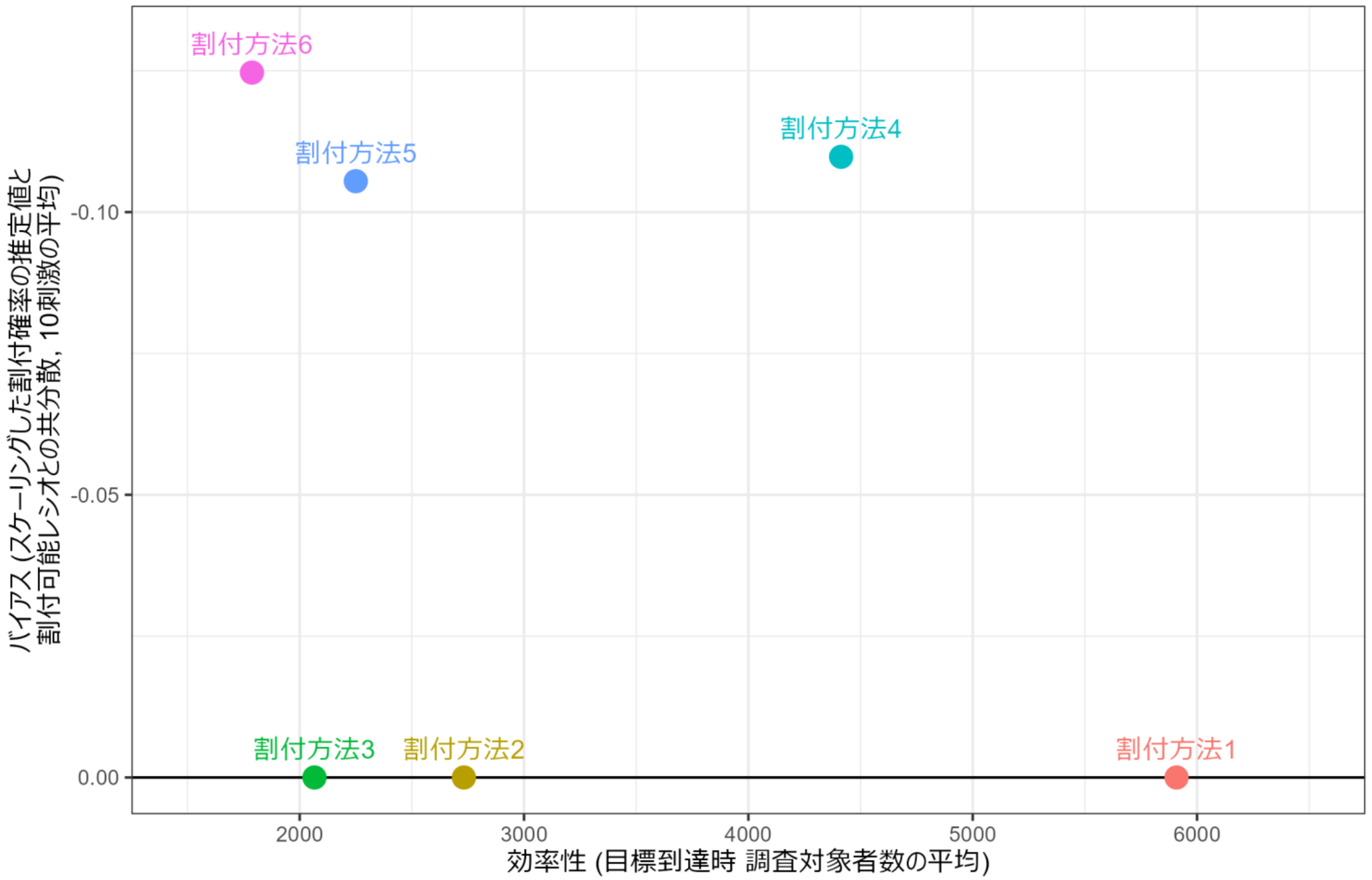
	Step 1.	Step 2.	Step 3.	Step 4.	効率性のレベル	バイアスが生じない	割付確率は既知	二段抽出法の二段目としてみたとき
	A. すべての刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
				B. 目標未達刺激あり	低			
			B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
		C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	低	○		
				B. 目標未達刺激あり	低			
			B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
		E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
				B. 目標未達刺激あり	低			
			B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
4	B. 割付可能刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	中		○	無作為抽出
				B. 目標未達刺激あり	中			
			B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
		B. 所与の順序	A. 割付可能	A. すべて	中		○	
				B. 目標未達刺激あり	中			
			B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
5,6		C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	高			
				B. 目標未達刺激あり	高			
			B. 割付可能かつ目標未達	–	高			
		E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	中		○	確率比例抽出(2Eの場合)
				B. 目標未達刺激あり	中			
			B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
	C. 割付可能かつ目標未達の刺激	A. 無作為	–	–	高			
		B. 所与の順序	–	–	高			
		C.,D. 目標未達刺激を優先	–	–	高			
		E.,F. 割付確率を算出	–	–	高		○	

- 方法6は、割付可能率が高い刺激1,9,10において、バイアスが負方向に大きくなり、割付確率の分散も大きくなります。良い割付手法とはいえません。
- 方法4と方法5を比べると、方法5は刺激1,9,10においてバイアスと割付確率の分散がやや大きく、刺激5,7ではやや改善しています。



前章の結果とあわせると、この母集団に対してもっと優れた割付手法は、割付方法3(1A-2D-3A-4A.すべての刺激の中から目標不足数の大きい刺激を優先して上限数まで選び、割付可能な刺激に割り付ける) と考えられます。

いっけん効率性が悪そうな方法ですが、実は必要な調査対象者数が少なく、かつバイアスが生じません。



INSIGHT FACTORY

まとめ

この章では、これから行う調査について計画している際に、割付によって生じるバイアスの大きさを定量的に評価する方法を提案しました。

7. さらなる話題

この章では

本章では、前章までに紹介した内容と関連した、次の3つの話題について述べます。

- シミュレーションの試行数
- 逆抽出
- 適応的な確率比例割付

1. シミュレーションの試行数

提案手法はすべて計算機シミュレーションに依存しており、試行数が多くなるほど正確になります。シミュレーションの試行数はどの程度必要でしょうか。

- 割付確率の推定にあたっては、割付確率の推定量の分散の推定量$\hat{V}_{ik}$が、すべての割付刺激においてある程度小さくなるまで、再割付試行数を増やすとよいでしょう。
- 調査計画時の効率性の推定にあたっては、割付方法の性質を把握できる程度の試行数があれば十分であり、50～100試行程度でよいと思われます。
- 調査計画時のバイアス推定についても同様です。割付試行数は50～100程度で十分と思われます。再割付試行数も、個々の割付試行における割付確率の正確な推定を目的としていないので、少なくてよいと思われます。

2. 逆抽出

ここまでの議論では、調査対象者の集合は母集団からの無作為標本であり、サイズが固定されている(4章)と考えてきました。

いっぽう実際の調査では、割付対象者数n_kがすべての刺激において目標に達したときに調査を中止する場合があります。

- 多くのweb調査では、調査者はいつでも調査を中止することができます。
- 調査の主目的が刺激についての聴取である場合、すべての刺激について割付対象者数が目標に到達した後、調査を続ける動機がありません。

標本抽出の分野では、母集団から抽出した標本が一定の基準を満たすまで標本抽出を逐次的に続ける方法を**逆抽出**inverse samplingと呼びます(Seber & Salehi, 2013)。上記に述べた調査も、一種の逆抽出とみなすことができます。

- 逆抽出によって得られた標本は、個々の対象者の抽出が無作為に行われていたとしても、無作為標本ではありません。

割付対象者数n_kを基準として調査を停止した場合、

- 割付によって割付対象者集合S_kに生じるバイアスとは別に、逆抽出であることによって調査対象者集合P_kにバイアスが生じます。
- 5章で提案した割付確率π_{ik}^Uの推定方法は、調査対象者集合が母集団からの無作為標本であることを前提としています。 またπ_{ik}^Pの推定方法は、調査対象者集合が割付の前に決まっていることを前提としています。これらの前提が失われることによって、割付確率の推定にバイアスが生じ、母集団特性の推定にもバイアスが生じるかもしれません。

バイアスの大きさについて、シミュレーションによる検討が可能です。なお、割付対象者数 n_k がいずれの刺激においてもある程度大きければ、逆抽出によって生じるバイアスは軽微であると考えられます。

3. 適応的な確率比例割付

4章では、割付確率が未知である割付方法で行った調査について、割付確率を事後的に推定する方法を提案しました。

- 割付確率が未知である割付手法が用いられる理由は、それまでの割付結果に応じて割付を適応的に行うため、つまり、割付の効率性を高めるためです。いいかえれば、割付の効率性を高めるための工夫の代償として、割付確率の事後的推定が必要となっているといえます。

割付を適応的に行い効率性を高めつつ、割付確率を事後的推定を不要とする方法として、2E,2Fが考えられます(下図)。

- すなわち、実査時に各対象者について割付を決定する際、まず割付可能刺激に割付確率を付与し、その確率に従って割付を行う、という方法です。各刺激のその時点での不足票数を利用して割付確率を適応的に付与することで、割付の効率性を高めることができます。
- 標本抽出における用語「確率比例抽出」にならい、これを「**適応的な確率比例割付**」と呼ぶことができるでしょう。
- 割付確率をデータとして保存しておけば、調査終了後、その割付確率を使って推定を行うことができます。

割付刺激数上限が2以上のとき、確率比例割付を実現するためには、所与の割付確率に従って定められた数の刺激を選ぶアルゴリズムが必要になります。これは標本抽出における非復元確率比例抽出の問題であり、数多くのアルゴリズムが提案されています(土屋, 2009)。

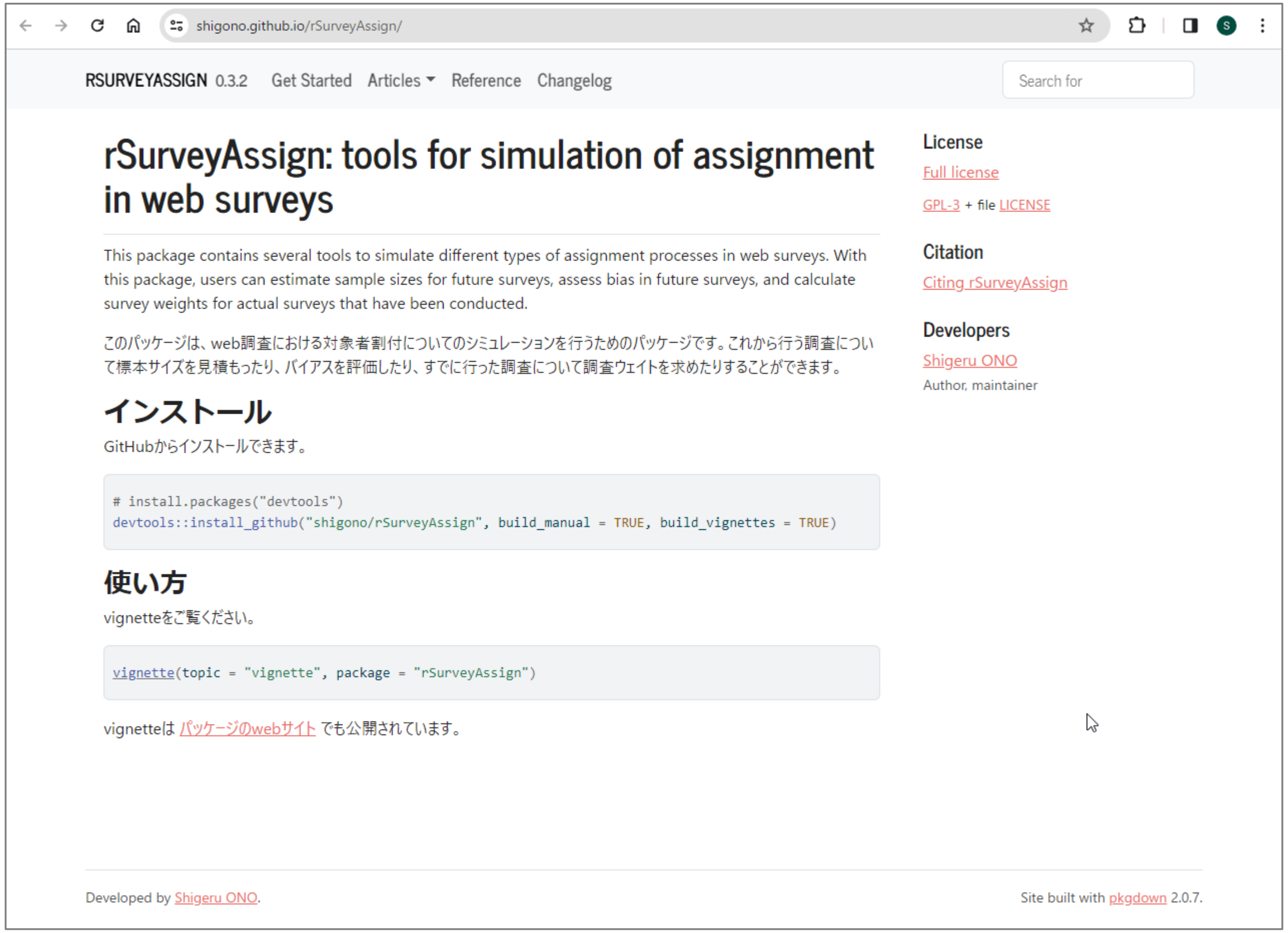
マーケティング・リサーチの実務において、適応的な確率比例割付を行っている事例をみたことはありませんが、興味深いアイデアだと思います。

Step 1.	Step 2.	Step 3.	Step 4.	効率性のレベル	バイアスが生じない	割付確率は既知	二段抽出法の二段目としてみたとき
A. すべての刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
	C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	低	○		
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
	E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	低	○	○	
			B. 目標未達刺激あり	低			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	低	○		
B. 割付可能刺激	A. 無作為	A. 割付可能	A. すべて	中		○	無作為抽出
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
	B. 所与の順序	A. 割付可能	A. すべて	中		○	
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
	C.,D. 目標未達刺激を優先	A. 割付可能	A. すべて	高			
			B. 目標未達刺激あり	高			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	高			
	E.,F. 割付確率を算出	A. 割付可能	A. すべて	中		○	確率比例抽出(2Eの場合)
			B. 目標未達刺激あり	中			
		B. 割付可能かつ目標未達	–	中			
C. 割付可能かつ目標未達の刺激	A. 無作為	–	–	高			
	B. 所与の順序	–	–	高			
	C.,D. 目標未達刺激を優先	–	–	高			
	E.,F. 割付確率を算出	–	–	高		○	

8. ソフトウェア

実は…

本発表で紹介した分析は、Rパッケージ rSurveyAssign で簡単に行うことができます


shigono.github.io/rSurveyAssign/

RSURVEYASSIGN 0.3.2 Get Started Articles Reference Changelog Search for

rSurveyAssign: tools for simulation of assignment in web surveys

This package contains several tools to simulate different types of assignment processes in web surveys. With this package, users can estimate sample sizes for future surveys, assess bias in future surveys, and calculate survey weights for actual surveys that have been conducted.

このパッケージは、web調査における対象者割付についてのシミュレーションを行うためのパッケージです。これから行う調査について標本サイズを見積もったり、バイアスを評価したり、すでに行った調査について調査ウェイトを求めたりすることができます。

インストール

GitHubからインストールできます。

```
# install.packages("devtools")
devtools::install_github("shigono/rSurveyAssign", build_manual = TRUE, build_vignettes = TRUE)
```

使い方

vignetteをご覧ください。

```
vignette(topic = "vignette", package = "rSurveyAssign")
```

vignetteは パッケージのwebサイト でも公開されています。

License

Full license

GPL-3 + file LICENSE

Citation

Citing rSurveyAssign

Developers

Shigeru ONO

Author, maintainer

Developed by Shigeru ONO.

Site built with pkgdown 2.0.7.

rSurveyAssignの素敵な機能

- 現時点で計22種類の割付方法をサポート
- 階層構造を持つ刺激に対応。対象者にいくつかの製品カテゴリといくつかのブランドを割り当てる調査に適用できる
- すでに行った調査について、割付によって生じたバイアスを取り除くためのウェイトを高速に生成
- 計画中の調査のために、割付方法の効率性を高速に評価
- 計画中の調査のために、割付によって生じるバイアスの大きさを評価し複数の指標で表現
- 日本語の解説書つき
- 開発者は日頃からぼーっとしており、話しかけるだけで喜ぶ

Key Takeaway

- 対象者の割付は、往々にして危険です。
  - 割付方法によって、効率性が異なります。
  - 割付方法によっては、集計結果に深刻なバイアスが生じます。

- 対象者の割付を伴う調査を企画している際には、ぜひお声がけください
  - 割付方法の効率性とバイアスを評価する方法があります。
  - 調査終了後、割付に伴って生じたバイアスを取り除く方法があります。

Appendix

Appendix A. 推定量のバイアスと分散

本節の内容

3章では、割付可能対象者の集合 Pにおける調査変数の平均

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i \in P} y_i$$

を、割り付けられた対象者の集合 S に基づいて推定する方法(推定量) として、次の3つを紹介した。

- **標本平均**

$$\hat{\bar{y}}_{Simple} = \frac{1}{n}\sum_{i \in S} y_i$$

- **Horvitz-Thompson推定量 (HT推定量)**

$$\hat{\bar{y}}_{HT} = \frac{1}{N}\sum_{i \in S} \frac{y_i}{\pi_i}$$

- **Hajek推定量**

$$\hat{\bar{y}}_{Hajek} = \frac{1}{\sum_{i \in S} \frac{1}{\pi_i}} \sum_{i \in S} \frac{y_i}{\pi_i}$$

本節では、これらの推定量のバイアスと分散を導出する。

以下では、すべての割付可能対象者 i について、割付確率 π_i が0より大であるとする。

1. 標本平均のバイアス

標本平均は以下のように表現できる。

$$\hat{\bar{y}}_S = \frac{1}{n}\sum_{i\in S} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i\in P} I_i y_i$$

n は期待値 $\sum_{i\in P}\pi_i$ の確率変数だが、便宜的に定数 $\sum_{i\in P}\pi_i$ とみなす。すると確率変数はI_i だけなので、

$$\begin{aligned}
Bias\left(\hat{\bar{y}}_{Simple}, \bar{y}\right) &\approx \frac{1}{n}\sum_{i\in P} E[I_i]y_i - \frac{1}{N}\sum_{i\in P} y_i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i\in P} \pi y_i - \frac{1}{N}\sum_{i\in P} y_i \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i\in P}\left(\frac{N}{n}\pi_i - 1\right) y_i \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i\in P}\left(\frac{N}{n}\pi_i - 1\right)(y_i - \bar{y}) + \frac{1}{N}\sum_{i\in P}\left(\frac{N}{n}\pi_i - 1\right)\bar{y} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i\in P}\left(\frac{N}{n}\pi_i - 1\right)(y_i - \bar{y}) + \frac{\bar{y}}{N}\left\{\left(\frac{N}{n}\sum_{i\in P}\pi_i\right) - N\right\} \\
&= \frac{N}{n}\times\frac{1}{N}\sum_{i\in P}\left(\pi_i - \frac{n}{N}\right)(y_i - \bar{y})
\end{aligned}$$

$$\downarrow \sum_{i\in P}\pi_i = n$$

$\mathcal{P}$におけるπ_iの平均を$\bar{\pi}$とすると、$\bar{\pi} = \frac{1}{N}\sum_{i \in P} \pi_i = \frac{n}{N}$ なので、

$$Bias\left(\hat{\bar{y}}_{Simple}, \bar{y}\right) \approx \frac{N}{n} \times \frac{1}{N} \sum_{i \in P} (\pi_i - \bar{\pi})(y_i - \bar{y})$$

$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_N), \boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_N)$として、

$$Bias\left(\hat{\bar{y}}_{Simple}, \bar{y}\right) \approx \frac{N}{n} \times Cov(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{y})$$

$$= Corr(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{y}) \times \frac{SD(\boldsymbol{\pi})}{\bar{\pi}} \times SD(\boldsymbol{y})$$

2. HT推定量のバイアス

平均のHT推定量は以下のように表現できる。

$$\hat{\bar{y}}_{HT} = \frac{1}{N}\sum_{i \in S} \frac{y_i}{\pi_i} = \frac{1}{N}\sum_{i \in P} I_i \frac{y_i}{\pi_i}$$

その期待値は

$$E[\hat{\bar{y}}_{HT}] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{i \in P} I_i \frac{y_i}{\pi_i}\right] = \frac{1}{N}\sum_{i \in P} E[I_i]\frac{y_i}{\pi_i} = \frac{1}{N}\sum_{i \in P} \pi_i \frac{y_i}{\pi_i} = \frac{1}{N}\sum_{i \in P} y_i = \bar{y}$$

従って

$$Bias(\hat{\bar{y}}_{HT}, \bar{y}) = E[\hat{\bar{y}}_{HT}] - \bar{y} = 0$$

このように、平均のHT推定量にはバイアスがない。

3. Hajek推定量のバイアス

平均のHajek推定量は以下のように表現できる。

$$\hat{\bar{y}}_{Hajek} = \sum_{i \in P} \frac{I_i y_i}{\pi_i} \Big/ \sum_{i \in P} \frac{I_i}{\pi_i}$$

ふたつの確率変数 $X = \sum_{i \in P} \frac{I_i}{\pi_i}$ と $Y = \sum_{i \in P} \frac{I_i y_i}{\pi_i}$ について考えよう。

- $E[X] = \sum_{i \in P} \frac{E[I_i]}{\pi_i} = N$ である。つまり、XとはNの不偏推定量である。
- $E[Y] = \sum_{i \in P} \frac{E[I_i] y_i}{\pi_i} = \sum_{i \in P} y_i$ である。つまり、Yとは$\sum_{i \in P} y_i$ の不偏推定量である。
- $\bar{y}_{Hajek} = Y/X$ である。つまり、Hajek推定量とはふたつの不偏推定量の比である。
- $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i \in P} y_i = E[Y]/E[X]$と書ける。つまり、$\bar{y}$ とはふたつの不偏推定量の期待値の比である。

Hajek推定量のバイアスは

$$Bias\left(\hat{\bar{y}}_{Hajek}, \bar{y}\right) = E\left[\hat{\bar{y}}_{Hajek}\right] - \bar{y} = E\left[\frac{Y}{X}\right] - \frac{E[Y]}{E[X]}$$

と書ける。つまり、不偏推定量の比の期待値と、不偏推定量の期待値の比との差であるといえる。これは一般に0でない。

では、Hajek推定量の偏りはどのくらい大きいだろうか。π_i, π_{ij}, y_iの式として表現するのは難しいが、以下のようにいえる。
引き続き、ふたつの確率変数$Y = \sum_{i \in P} \frac{I_i y_i}{\pi_i}, X = \sum_{i \in P} \frac{I_i}{\pi_i}$ について考えよう。

$Cov(A, B) = E[AB] - E[A]E[B]$より、

$$Cov\left(\frac{Y}{X}, X\right) = E[Y] - E\left[\frac{Y}{X}\right]E[X]$$
$$E\left[\frac{Y}{X}\right] - \frac{E[Y]}{E[X]} = -\frac{Cov\left(\frac{Y}{X}, X\right)}{E[X]}$$

が成り立つ。Y/Xとは$\hat{y}_{Hajek}$のことであった。 $X = \sum_{i \in P} \frac{I_i}{\pi_i}$ は$\hat{N}$ でありその期待値はNである。ここから、Hajek推定量の偏りは

$$Bias(\hat{y}_{Hajek}, \bar{y}) = -\frac{1}{N} Cov(\hat{y}_{Hajek}, \hat{N}) = -\frac{1}{N}\{Corr(\hat{y}_{Hajek}, \hat{N}) \times SD(\hat{y}_{Hajek}) \times SD(\hat{N})\}$$

このように、平均のHajek推定量の偏りは、 Hajek推定量の標準誤差と、母集団サイズのHT推定量である $\hat{N} = \sum_{i \in P} \frac{I_i}{\pi_i}$ の標準誤差との積に比例する。いずれも、割り付けられた対象者数nが大きければ小さい。

従って、 Hajek推定量の偏りは0ではないが、nがある程度大きければ偏りは小さいと考えることができる。

4. HT推定量の分散

平均のHT推定量

$$\hat{\bar{y}}_{HT} = \frac{1}{N}\sum_{i\in S}\frac{y_i}{\pi_i} = \frac{1}{N}\sum_{i\in S} I_i \frac{y_i}{\pi_i}$$

の分散を求めよう。

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\bar{y}}_{HT}) &= Var\left(\frac{1}{N}\sum_{i\in S}\frac{I_i y_i}{\pi_i}\right) \\
&= \frac{1}{N^2} Var\left(\sum_{i\in S}\frac{I_i y_i}{\pi_i}\right) \\
&= \frac{1}{N^2} Cov\left(\sum_{i\in S}\frac{I_i y_i}{\pi_i}, \sum_{j\in S}\frac{I_j y_j}{\pi_j}\right) \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} Cov\left(\frac{I_i y_i}{\pi_i}, \frac{I_i y_j}{\pi_j}\right) \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{i\in S}\sum_{j\in S}\frac{y_i y_j}{\pi_i \pi_j} Cov(I_i, I_j) \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{i\in S}\sum_{j\in S}\frac{y_i y_j}{\pi_i \pi_j}\ (\pi_{ij} - \pi_i \pi_j) \\
&= \frac{1}{N^2}\left[\sum_{i\in S}\frac{y_i^2}{\pi_i^2}(\pi_i - \pi_i^2) + \sum_{i\in S}\sum_{j\in S; j\neq i}\frac{y_i y_j}{\pi_i \pi_j}(\pi_{ij} - \pi_i \pi_j)\right]
\end{aligned}$$

5. 推定量の分散の線形近似

標本平均とHajek推定量の分散を HT推定量と同じやりかたで求めようとすると、死ぬほど複雑になってしまうことが目に見えている。そこで発想を転換し、線形化と呼ばれるテクニックを用いて、推定量の分散を近似的に求めることにする。

本項では線形化について説明する。

かんたんな例

- 次のような場面について考える。
    - 変数xの母平均を θ_x、変数yの母平均をθ_yとする (母平均としたのはただの例で、どんな特性であってもよい)。
    - 私たちはθ_xとθ_yについて、それぞれの不偏推定量 $\hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y$ を持っている。また、それらの分散$Var(\hat{\theta}_x), Var(\hat{\theta}_y)$,共分散$Cov(\hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y)$を知っている。
    - $\theta = \theta_y / \theta_x$を推定したい。その推定量として、$\hat{\theta} = \hat{\theta}_y / \hat{\theta}_x$ を用いることにする (前項で述べたように $\hat{\theta}$はθの不偏推定量ではないが、そのことはここでの主題ではない)。
- このとき、$\hat{\theta}$ の分散はどうなるだろうか？
    - もし$\hat{\theta}$が $\hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y$ の線形関数 (なんらかの重み付き和) であれば、その分散は簡単に求められる。
    - しかし、 $\hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y$の比について分散を求めるのはとても難しい。

この問いに対して、テイラーの公式を使って答えてみよう。

この公式を使えば、関数$f(x, y)$ を、点(a, b)のまわりで、x, yの1次式で近似できる。

- **テイラーの公式 (2変数, 1次まで)**

  関数$f(x, y)$が微分可能で、その偏導関数が連続なら、

$$f(x, y) \approx f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \times (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \times (y - b)$$

  証明: 適当な教科書、たとえば永田(2005)を参照。

Brook Taylor (1685-1731)
イギリスの数学者だそうです

以下のように考えることができる。

Step 1.　$f(x,y)=y/x$として、

$$\hat{\theta}=f\left(\hat{\theta}_x,\hat{\theta}_y\right)$$

点 (θ_x,θ_y)のまわりでテイラーの公式をあてはめると

$$\hat{\theta}\approx f\left(\theta_x,\theta_y\right)+\frac{\partial f}{\partial\hat{\theta}_x}\left(\theta_x,\theta_y\right)\times\left(\hat{\theta}_x-\theta_x\right)+\frac{\partial f}{\partial\hat{\theta}_y}\left(\theta_x,\theta_y\right)\times\left(\hat{\theta}_y-\theta_y\right)$$

Step 2.　$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{y}{x^2}$だから、 $\frac{\partial f}{\partial\hat{\theta}_x}\left(\hat{\theta}_x,\hat{\theta}_y\right)=\frac{\hat{\theta}_y}{\hat{\theta}_x^2}$である。 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{x}$ だから、 $\frac{\partial f}{\partial\hat{\theta}_y}\left(\hat{\theta}_x,\hat{\theta}_y\right)=\frac{1}{\hat{\theta}_x}$ である。

Step 3.　点 (θ_x,θ_y)のまわりでは、 $\frac{\partial f}{\partial\hat{\theta}_x}\left(\theta_x,\theta_y\right)=\frac{\theta_y}{\theta_x^2}$、 $\frac{\partial f}{\partial\hat{\theta}_y}\left(\theta_x,\theta_y\right)=\frac{1}{\theta_x}$である。従って

$$\hat{\theta}\approx\frac{\theta_y}{\theta_x}-\frac{\theta_y}{\theta_x^2}\left(\hat{\theta}_x-\theta_x\right)+\frac{1}{\theta_x}\left(\hat{\theta}_y-\theta_y\right)$$

このように、分散がわからない推定量 $\hat{\theta}$ を、分散がわかっている推定量$\hat{\theta}_x,\hat{\theta}_y$の線形関数として近似できた。これを**線形化**という。

Step 4. ここから、$\hat{\theta}$の分散を下式のように近似できる。カッコ内は、 $\hat{\theta}$の式の定数項をすべて無視した式である。

$$Var(\hat{\theta}) \approx Var\left(-\frac{\theta_y}{\theta_x^2}\hat{\theta}_x + \frac{1}{\theta_x}\hat{\theta}_y\right)$$

Step 5. 整理すると、

$$\begin{aligned} Var(\hat{\theta}) &\approx \frac{1}{\theta_x^2} Var\left(-\frac{\theta_y}{\theta_x}\hat{\theta}_x + \hat{\theta}_y\right) \\ &= \frac{1}{\theta_x^2}\left(\theta^2 Var(\hat{\theta}_x) + Var(\hat{\theta}_y) - 2\theta Cov(\hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y)\right) \end{aligned}$$

こうして解が得られた。

ここで注目したいのは、解そのものではなく、解に至るプロセスである。Step 1.から Step 4.について振り返ろう。

- 関心ある推定量 $\hat{\theta}$ を、分散がわかっている推定量 $\hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y$ の関数 $f(\hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y)$ として書いた。さいわい、この関数は微分可能だった。
- $f(\hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y)$を$\hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y$ で偏微分し、テイラーの公式を使って、$\hat{\theta}$ を$\hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y$の線形関数として近似した。
- ここから、関心ある推定量$\hat{\theta}$の分散を、 $\hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y$の線形関数の分散として近似した。

線形化による分散の近似

より一般的に、任意の推定量についてその分散を近似する方法を紹介しよう。

Step 1. 関心ある推定量$\hat{\theta}$を、なんらかの推定量$\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_K$の関数 $\hat{\theta} = f(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_K)$として書く。

- 関数fは、 $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_K$で偏微分できる関数にしておく。
- $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_K$ は分散が既知でないといけないので、なんらかの変数の母合計のHT推定量にしておく。すなわち、 $w_i = 1/\pi_i$ として、$\hat{\tau}_k = \sum_{i \in S} w_i z_{ik}$という形をとっているものにしておく。

Step 2. $\hat{\theta} = f(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_K)$を$\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_K$でそれぞれ偏微分し、下式の$a_k$を得る。

$$a_k = \frac{\partial f}{\partial \hat{\tau}_k}(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_K)$$

Step 3. a_kに含まれる$\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_K$を、それぞれをHT推定量としてみたときの推定対象$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_K$に置き換える。

- 前の例で、まず $\frac{\partial f}{\partial \hat{\theta}_x}\left(\hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y\right) = \frac{\hat{\theta}_y}{\hat{\theta}_x^2}$ を求め、つぎに$\hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y$を$\theta_x, \theta_y$に置き換えたことに相当する。

Step 4. 変数$z_i = a_1 z_{i1} + a_2 z_{i2} + \cdots a_K z_{iK}$を定義し、母合計のHT推定量 $\hat{\tau}_z = \sum_{i \in S} w_i z_i$ の分散を導出する。これが $\hat{\theta}$の分散の近似となる。

- 前の例では$\hat{\theta}$ の近似式をわざわざ求めたが、結局それは用いずに、そのなかの定数項を無視した式を使った。つまり、 $\hat{\theta}$の近似式はどうでもよい。単に$a_1\hat{\tau}_1 + a_2\hat{\tau}_2 + \cdots + a_K\hat{\tau}_K$の分散を求めればよい。
- $\hat{\tau}_k = \sum_{i \in S} w_i z_{ik}$ であるから、先に個人レベルで$z_i = a_1 z_{i1} + a_2 z_{i2} + \cdots a_K z_{iK}$を求め、次に$\sum_{i \in S} w_i z_i$の分散を求めてもよい。
- ここで定義したz_iを**線形化関数**と呼ぶ。なお線形化関数は、関心ある推定量$\hat{\theta}$をw_iで偏微分しても得られる(土屋, 2009, p.96)。

HT推定量の分散の近似

練習として、母平均のHT推定量 $\hat{\bar{y}}_{HT}$ について分散を近似してみよう。

- Step 1. 関心ある推定量$\hat{\bar{y}}_{HT}$を、 $\hat{\tau}_1 = \sum_{i \in S} w_i y_i$として$\hat{\bar{y}}_{HT} = f(\hat{\tau}_1)$と書く。ただし$f(x) = x/N$である。
- Step 2. $\hat{\bar{y}}_{HT} = f(\hat{\tau}_1)$を$\hat{\tau}_1$で微分し、$a_1 = 1/N$を得る。
- Step 3. (この例では、a_1のなかに変数は入っていない)
- Step 4. 線形化変数は$z_i = a_1 y_i = \frac{1}{N} y_i$ となる。その母合計のHT推定量 $\hat{\tau}_z = \sum_{i \in S} w_i z_i$ の 分散を導出する。これが、 $\hat{\bar{y}}_{HT}$ の分散の近似となる。

この例では、 $\hat{\tau}_z = \sum_{i \in S} w_i z_i = \frac{1}{N} \sum_{i \in S} \frac{y_i}{\pi_i} = \hat{\bar{y}}_{HT}$ なので、先に求めた $\hat{\bar{y}}_{HT}$の分散そのものが得られる。すなわち

$$Var(\hat{\bar{y}}_{HT}) = \frac{1}{N^2} \left[\sum_{i \in P} \frac{y_i^2}{\pi_i^2} (\pi_i - \pi_i^2) + \sum_{i \in P} \sum_{j \in P; j \neq i} \frac{y_i y_j}{\pi_i \pi_j} (\pi_{ij} - \pi_i \pi_j) \right]$$

6. 標本平均の分散

標本平均の分散を近似してみよう。標本平均は次のように表現できる。

$$\hat{\bar{y}}_{Simple}=\frac{1}{n}\sum_{i\in S}y_i=\frac{1}{\sum_{i\in S}w_i\pi_i}\sum_{i\in P}w_i\pi_i y_i$$

以下では、 $t_\pi=\sum_{i\in P}\pi_i$, $t_{\pi y}=\sum_{i\in P}\pi_i y_i$ とする。

- Step 1. $\hat{\tau}_1=\sum_{i\in S}w_i\pi_i$, $\hat{\tau}_2=\sum_{i\in S}w_i\pi_i y_i$として$\hat{\bar{y}}_{Simple}=f(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2)$と書く。ただし$f(x,y)=y/x$である。
- Step 2. $\hat{\bar{y}}_{Simple}=f(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2)$を$\hat{\tau}_1$で偏微分して$a_1=-\frac{\hat{\tau}_2}{\hat{\tau}_1^2}$ とする。$\hat{\tau}_2$で偏微分して$a_2=\frac{1}{\hat{\tau}_1}$とする。
- Step 3. a_1,a_2 のなかの$\hat{\tau}_1$をその推定対象 t_π に、 $\hat{\tau}_2$をその推定対象$t_{\pi y}$に置き換える。 $a_1=-\frac{t_{\pi y}}{t_\pi^2}, a_2=\frac{1}{\tau_1}=\frac{1}{t_\pi}$ となる。
- Step 4. 線形化変数は$z_i=a_1\pi_i+a_2\pi_i y_i=-\frac{t_{\pi y}}{t_\pi^2}\pi_i+\frac{1}{t_\pi}\pi_i y_i=\frac{\pi_i}{t_\pi}(y_i-\frac{t_{\pi y}}{t_\pi})$となる。その母合計のHT推定量 $\hat{\tau}_z=\sum_{i\in P}w_i z_i$ の分散を導出し、$\hat{\bar{y}}_{Simple}$の分散の近似とする。

$$Var\left(\bar{y}_{Simple}\right)\approx\sum_{i\in P}\frac{z_i^2}{\pi_i^2}\left(\pi_i-\pi_i^2\right)+\sum_{i\in P}\sum_{j\in P;j\neq i}\frac{z_i z_j}{\pi_i\pi_j}\left(\pi_{ij}-\pi_i\pi_j\right)$$

$$=\frac{1}{t_\pi^2}\left[\sum_{i\in P}\left(y_i-\frac{t_{\pi y}}{t_\pi}\right)^2\left(\pi_i-\pi_i^2\right)+\sum_{i\in P}\sum_{j\in P;j\neq i}(y_i-\frac{t_{\pi y}}{t_\pi})(y_j-\frac{t_{\pi y}}{t_\pi})\left(\pi_{ij}-\pi_i\pi_j\right)\right]$$

$$=\frac{1}{N^2}\left[\sum_{i\in P}\frac{\left(y_i-\frac{t_{\pi y}}{t_\pi}\right)^2}{\left(\frac{t_\pi}{N}\right)^2}\left(\pi_i-\pi_i^2\right)+\sum_{i\in P}\sum_{j\in P;j\neq i}\frac{(y_i-\frac{t_{\pi y}}{t_\pi})(y_j-\frac{t_{\pi y}}{t_\pi})}{\left(\frac{t_\pi}{N}\right)^2}\left(\pi_{ij}-\pi_i\pi_j\right)\right]$$

7. Hajek推定量の分散

母平均のHajek推定量

$$\hat{\bar{y}}_{Hajek} = \sum_{i \in P} \frac{I_i y_i}{\pi_i} \Big/ \sum_{i \in P} \frac{I_i}{\pi_i}$$

について分散を近似してみよう。 x_iは常に1である変数とする。

- Step 1. 関心ある推定量$\hat{\bar{y}}_{Hajek}$を、 $\hat{\tau}_1 = \sum_{i \in S} w_i x_i$, $\hat{\tau}_2 = \sum_{i \in S} w_i y_i$として$\hat{\bar{y}}_{Hajek} = f(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2)$と書く。ただし$f(x, y) = y/x$である。
- Step 2. $\hat{\bar{y}}_{Hajek} = f(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2)$を$\hat{\tau}_1$で偏微分して$a_1 = -\frac{\hat{\tau}_2}{\hat{\tau}_1^2}$とする。 $\hat{\tau}_2$で偏微分して$a_2 = \frac{1}{\hat{\tau}_1}$とする。
- Step 3. a_i, a_2のなかの$\hat{\tau}_1$をその推定対象Nに置き換え、$\hat{\tau}_2$をその推定対象$N\bar{y}$に置き換える。 $a_1 = -\frac{N\bar{y}}{N^2} = -\frac{\bar{y}}{N}, a_2 = \frac{1}{N}$ となる。
- Step 4. 線形化変数は$z_i = a_1 x_i + a_2 y_i = -\frac{\bar{y}}{N} + \frac{1}{N} y_i = \frac{1}{N}(y_i - \bar{y})$となる。その母合計のHT推定量 $\hat{\tau}_z = \sum_{i \in S} w_i z_i$ の分散を導出し、$\hat{\bar{y}}_{Hajek}$の分散の近似とする。

$$
\begin{aligned}
Var(\bar{y}_{Hajek}) &\approx \sum_{i \in P} \frac{z_i^2}{\pi_i^2}\left(\pi_i - \pi_i^2\right) + \sum_{i \in P} \sum_{j \in P; j \neq i} \frac{z_i z_j}{\pi_i \pi_j}\left(\pi_{ij} - \pi_i \pi_j\right) \\
&= \frac{1}{N^2}\left[\sum_{i \in P} \frac{(y_i - \bar{y})^2}{\pi_i^2}\left(\pi_i - \pi_i^2\right) + \sum_{i \in P} \sum_{j \in P; j \neq i} \frac{(y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y})}{\pi_i \pi_j}\left(\pi_{ij} - \pi_i \pi_j\right)\right]
\end{aligned}
$$

8. まとめ

3つの推定量のバイアスと分散について要約する。

		バイアス	分散
標本平均	$\bar{y}_{Simple} = \frac{1}{n}\sum_{i \in S} y_i$	$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_N)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_N)$として、およそ $Corr(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{y}) \times \frac{SD(\boldsymbol{\pi})}{\bar{\pi}} \times SD(\boldsymbol{y})$	$t_\pi = \sum_{i \in P} \pi_i$, $t_{\pi y} = \sum_{i \in P} \pi_i y_i$ として、およそ $\frac{1}{N^2}\left[\sum_{i \in P} \frac{\left(y_i - \frac{t_{\pi y}}{t_\pi}\right)^2}{\bar{\pi}^2}(\pi_i - \pi_i^2) + \sum_{i \in P}\sum_{j \in P; j \neq i} \frac{(y_i - \frac{t_{\pi y}}{t_\pi})(y_j - \frac{t_{\pi y}}{t_\pi})}{\bar{\pi}^2}(\pi_{ij} - \pi_i \pi_j)\right]$
HT推定量	$\bar{y}_{HT} = \frac{1}{N}\sum_{i \in S} \frac{y_i}{\pi_i}$	0	$\frac{1}{N^2}\left[\sum_{i \in P} \frac{y_i^2}{\pi_i^2}(\pi_i - \pi_i^2) + \sum_{i \in P}\sum_{j \in P; j \neq i} \frac{y_i y_j}{\pi_i \pi_j}(\pi_{ij} - \pi_i \pi_j)\right]$
Hajek推定量	$\bar{y}_{Hajek} = \frac{1}{\sum_{i \in S}\frac{1}{\pi_i}}\sum_{i \in S} \frac{y_i}{\pi_i}$	およそ0	およそ $\frac{1}{N^2}\left[\sum_{i \in P} \frac{(y_i - \bar{y})^2}{\pi_i^2}(\pi_i - \pi_i^2) + \sum_{i \in P}\sum_{j \in P; j \neq i} \frac{(y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y})}{\pi_i \pi_j}(\pi_{ij} - \pi_i \pi_j)\right]$

Appendix B. 推定量の性質についてのシミュレーション

本節では

2章では、３つの推定量の性質について理解するために簡単なシミュレーションを行った。その詳細について述べる。

1. 割付可能対象者集合の生成

割付可能対象者集合を以下の手順で生成した。

- 割付確率のSD S_π を{0.1, 0.3, 0.5}, およその相関係数$R_{\pi y}$を{-1.00, -0.95, ⋯, +0.95, +1.00} とし、3x41=123個の組み合わせごとに、割付可能対象者集合を5個づつ、計123x5=615個生成した。サイズは$N = 1000$とした。
- 各集合は以下のように生成した。対象者$i(= 1, \dots, N)$の割付確率をπ_i, 調査変数の値をy_iとする。割付可能対象者を通じて値を平均0, 分散1に標準化する関数を$Standardize(\cdot)$とする。

$$\pi'_i \sim Uniform(0,1)$$

$$\pi_i = Standardize(\pi'_i) \times S_\pi + 0.1$$

$$z'_i \sim N(0,1)$$

$$z_i = Standardize(z'_i)$$

$$y'_i = \frac{R_{\pi y}}{S_\pi \sqrt{1 - R_{\pi y}^2}} (\pi_i - 0.1) + z_i$$

$$y_i = Standardize(y'_i) \times 10 + 50$$

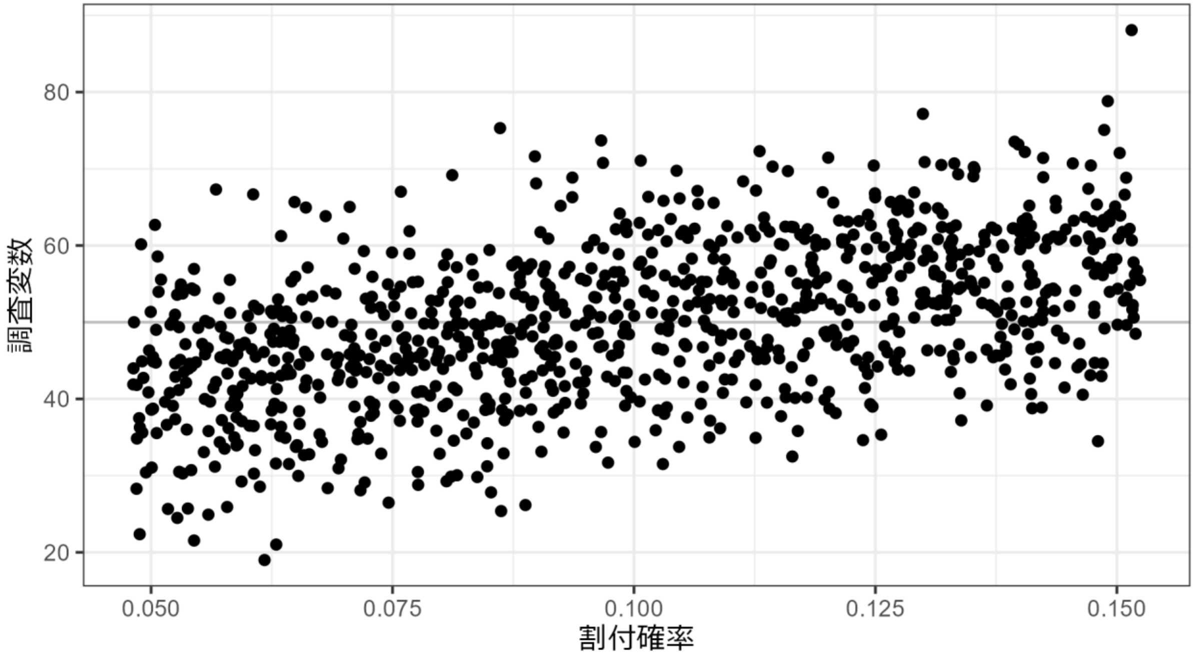
- こうして得られた割付可能対象者集合は、調査変数の値は平均50, SD10, 割付確率は平均0.1, SD S_π、調査変数と割付確率との相関係数はおよそ$R_{\pi y}$となる。

それぞれの割付可能対象者集合について500回の割付を繰り返し、 前頁と同様に、3種類の推定量について(推定値-50)の{平均、SD, 二乗の平均の平方根}を求めた。

割付可能対象者集合の例を示す。調査変数の値は平均50, SD10, 割付確率は平均0.1, SD0.03である。調査変数と割付確率のあいだには正の相関があり、相関係数は +0.49 である。

割付確率に従い、対象者ごとに独立に割付を行い、割り付けられた対象者の調査変数の値から、この母集団における調査変数の平均(50)を推定するという場面について考える。

解析的に求めた、３つの推定量のバイアスと分散を示す。

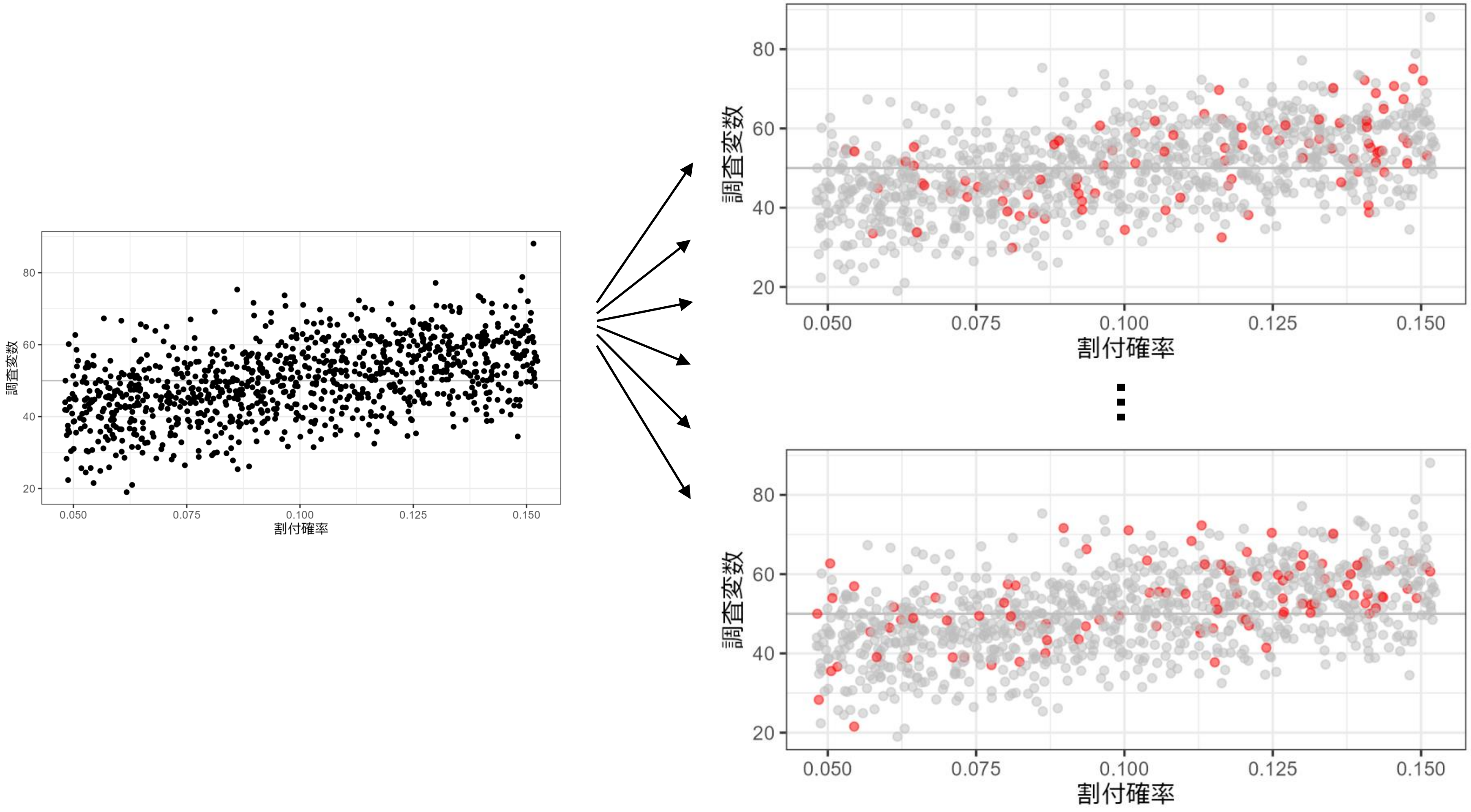


	バイアス	√分散	√MSE
標本平均	およそ $+0.49 \times \frac{0.03}{0.1} \times 10 = +1.47$	およそ 0.93	およそ 1.74
HT推定量	0	4.95	4.95
Hajek推定量	およそ0	およそ 1.02	およそ 1.02

2. シミュレーション

それぞれの割付可能対象者集合に対して、実際に割付を1000回繰り返した。なお、各割付は対象者ごとに独立に行った。

前頁に示した割付可能対象者集合における例を示す。



割り付けられた対象者数:88
標本平均: 51.8
HT推定量: 43.6
Hajek推定量: 50.3

⋮

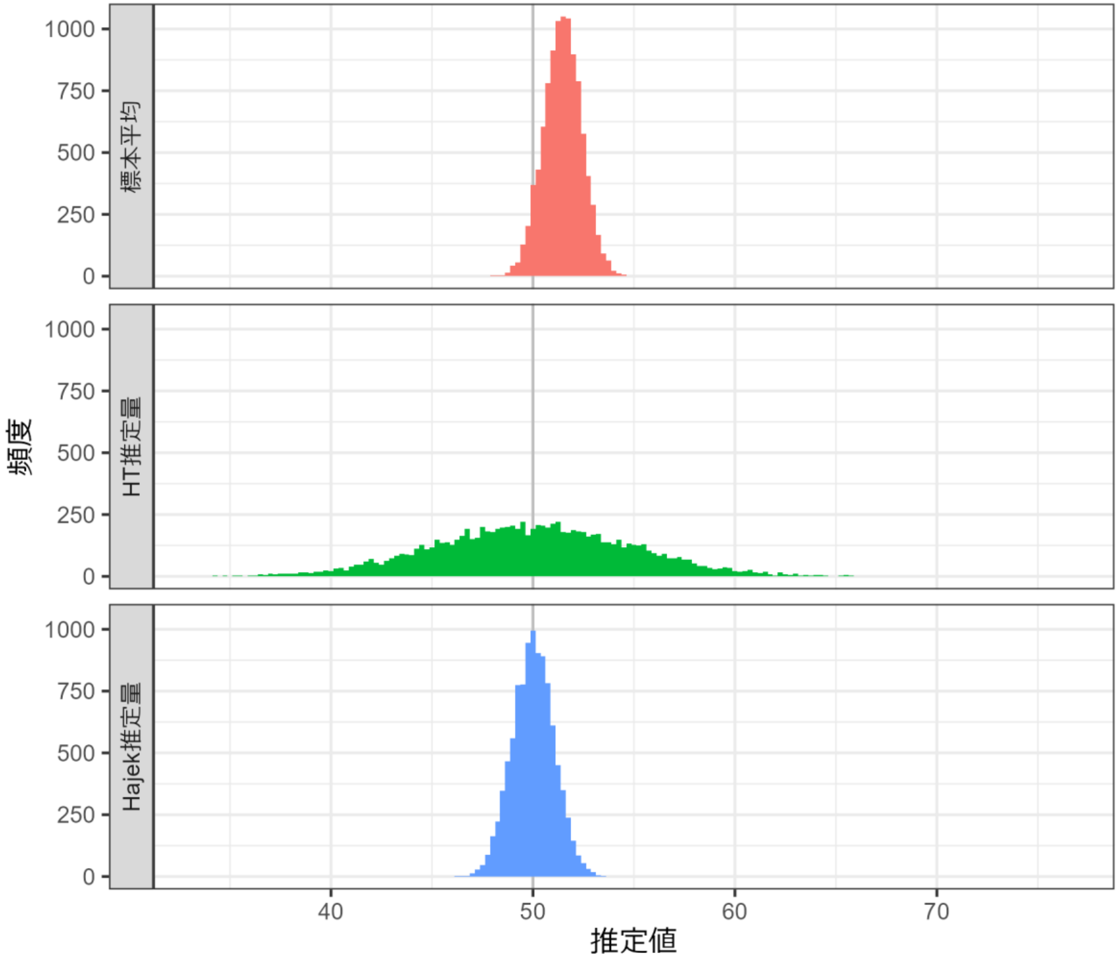
割り付けられた対象者数:96
標本平均: 52.9
HT推定量: 51.4
Hajek推定量: 51.2

割り付けられた対象者を赤で示す

3. 結果

前頁に示した割付可能対象者集合について、推定値の分布を示す。

解析的に求めたバイアス・標準誤差・RMSEとほぼ一致していることがわかる。



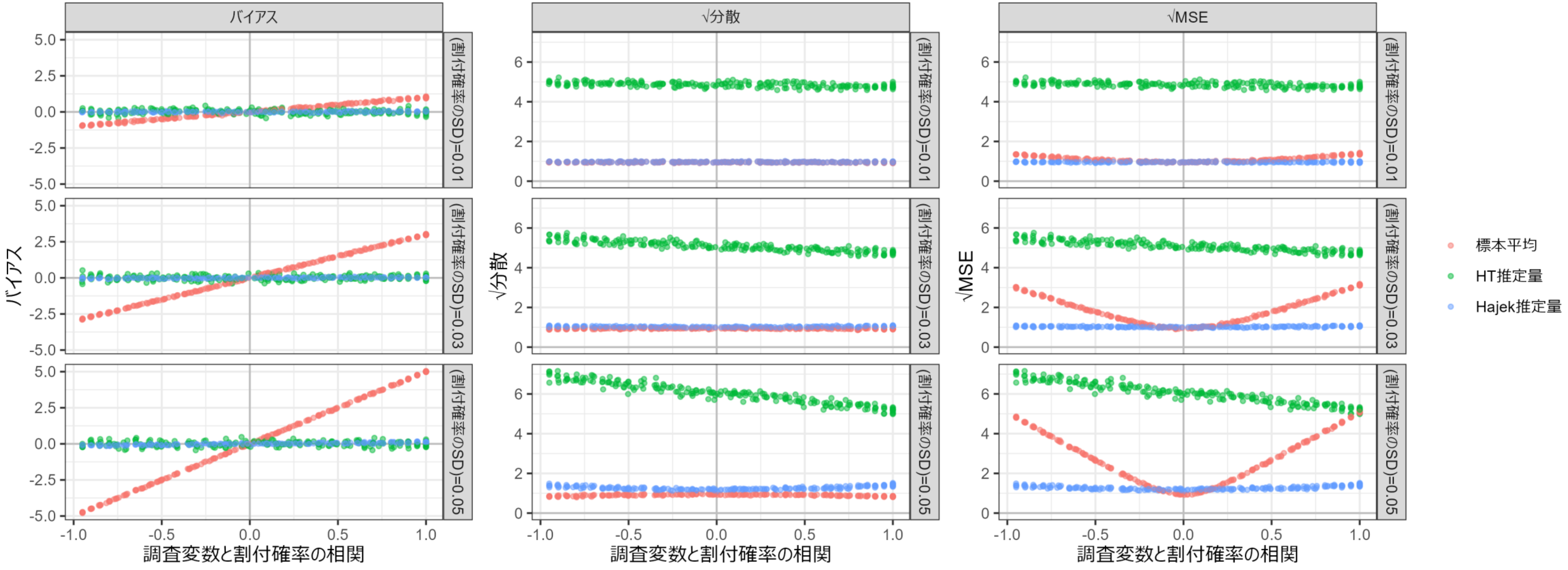
シミュレーションの結果

	バイアス (推定値-50)の平均	√分散 推定値のSD	√MSE (推定値-50)の二乗の平均の平方根
標本平均	**+1.463**	**0.938**	**1.738**
HT推定量	**-0.012**	**4.941**	**4.940**
Hajek推定量	**+0.010**	**1.031**	**1.031**

解析的に求めた結果(前々頁の表を再掲)

	バイアス	**√分散**	**√MSE**
標本平均	およそ $+0.49 \times \frac{0.03}{0.1} \times 10 = +1.47$	およそ0.93	およそ1.74
HT推定量	0	4.95	4.95
Hajek推定量	およそ0	およそ1.02	およそ1.02

615個の割付可能対象者集合に対するシミュレーションの結果を示す。



Appendix C. 3種類の割付確率と推定量

本節では

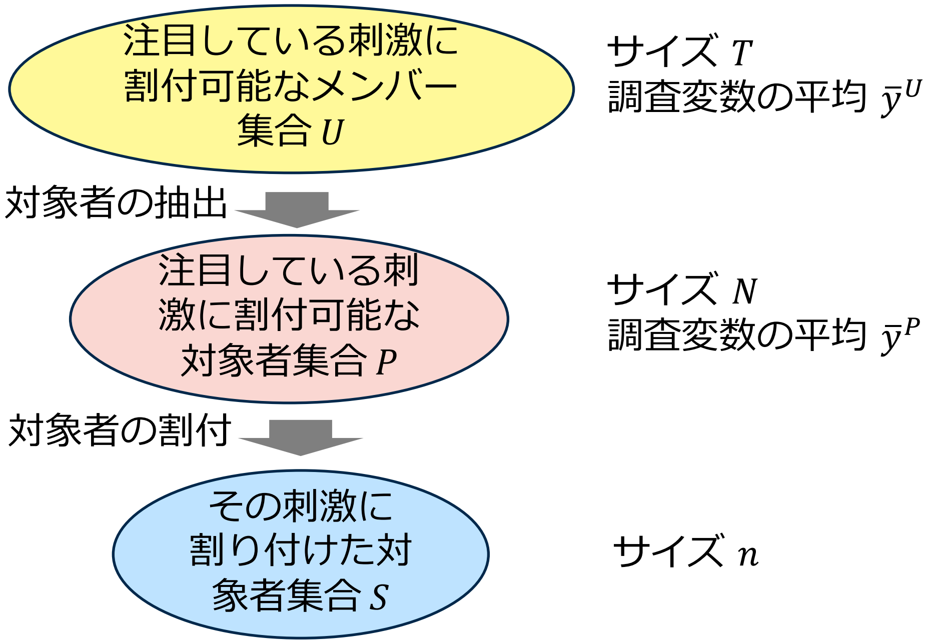
4章では、ある対象者の割付が他の対象者の割付可能性に依存しているタイプの割付方法について検討した。

このような割付方法では、割付確率について3種類の定義を考えることがができる。

本項では、３種類の割付確率と推定量の関係について述べる。

なお、

- 調査対象者は母集団からの無作為抽出であるとする。
- 割付方法は所与とする。
- ある刺激について考える。簡略のため、刺激を表す添字は省略する。下図の表記を用いる。



1.割付確率の定義

割付確率の推定が必要になるのは、ある対象者の割付が他の対象者の割付結果に依存している割付方法である。

こうした割付方法の場合、割付確率について次の3種類の定義が可能である。

A) 割付方法と母集団のもとでの割付確率 $\boldsymbol{\pi_{ik}^{U}}$

- 割付方法と母集団を所与としたとき、U_kのメンバーiが調査対象者として抽出されたときにその人がその人の割付可能刺激kに割り付けられる確率。
- 母集団の他のすべての人の、すべての刺激への割付可能性に依存する。

B) 割付方法と調査対象者集合のもとでの割付確率 $\boldsymbol{\pi_{ik}^{P}}$

- 割付方法と調査対象者集合を所与としたとき、調査対象者i がその人の割付可能刺激kに割り付けられる確率。
- 他のすべての調査対象者の、すべての刺激への割付可能性に依存する。

C) 割付方法と調査対象者集合と調査参加順序のもとでの割付確率 $\boldsymbol{\pi_{ik}^{Po}}$

- 割付方法と調査対象集合と調査参加順序を所与としたとき、調査対象者iがその人の割付可能刺激kに割り付けられる確率。
- その調査対象者よりも前に調査に参加した調査対象者の、すべての刺激への割付可能性に依存する。

説明のため、簡単な数値例を挙げよう。

- 母集団は下図の14人。刺激数は3。割付刺激数上限は1、各刺激の目標割付対象者数を2とする。
- 母集団から無作為に7人を抽出し調査対象者とする。無作為に並び替え、割付方法1C-2Bで割付を行う。
    - すなわち、各対象者について、その時点で目標未達でありかつ割付可能な刺激のなかから、A,B,Cの順にひとつを選ぶ。

調査対象者の選び方は3432通りあり、調査参加順序は5040通りある。割付の例を示す。

母集団

メンバーID	刺激1	刺激2	刺激3
1			○
2			○
3		○	
4		○	
5		○	○
6		○	○
7	○		
8	○		
9	○		○
10	○		○
11	○	○	
12	○	○	
13	○	○	○
14	○	○	○

○: 割付可能

3432通り

調査対象者集合 (調査参加順序なし)

メンバーID	刺激1	刺激2	刺激3
2			○
3		○	
6		○	○
9	○		○
10	○		○
12	○	○	
13	○	○	○

○: 割付可能

5040通り

調査対象者集合 (調査参加順序あり)

メンバーID	刺激1	刺激2	刺激3
6		●	○
12	●	○	
9	●		○
10	○		●
13	○	●	○
2			●
3		○	

○: 割付可能
●: 割付

この数値例は母集団がとても小さいので、ありうるすべての調査対象者集合と調査参加順序 (3432x5040, およそ1700万通り) のもとで割付を行い、正確な割付確率を求めることができる。3種類の割付確率を示す。

母集団

メンバーID	刺激1	刺激2	刺激3
1			○
2			○
3		○	
4		○	
5		○	○
6		○	○
7	○		
8	○		
9	○		○
10	○		○
11	○	○	
12	○	○	
13	○	○	○
14	○	○	○

○: 割付可能

3432通り

調査対象者集合 (調査参加順序なし)

メンバーID	刺激1	刺激2	刺激3
2			○
3		○	
6		○	○
9	○		○
10	○		○
12	○	○	
13	○	○	○

○: 割付可能

5040通り

調査対象者集合 (調査参加順序あり)

メンバーID	刺激1	刺激2	刺激3
6		●	○
12	●	○	
9	●		○
10	○		●
13	○	●	○
2			●
3		○	

○: 割付可能
●: 割付

A. 割付方法と母集団のもとでの割付確率

メンバーID	刺激1	刺激2	刺激3
1			0.929
2			0.929
3		0.724	
4		0.724	
5		0.724	0.218
6		0.724	0.218
7	0.499		
8	0.499		
9	0.499		0.410
10	0.499		0.410
11	0.499	0.255	
12	0.499	0.255	
13	0.499	0.255	0.191
14	0.499	0.255	0.191

B. 割付方法と調査対象者集合のもとでの割付確率

メンバーID	刺激1	刺激2	刺激3
2			0.916
3		0.789	
6		0.789	0.106
9	0.500		0.386
10	0.500		0.386
12	0.500	0.211	
13	0.500	0.211	0.184

C.割付方法と調査対象者集合と調査参加順もとでの割付確率

メンバーID	刺激1	刺激2	刺激3
6		1	0
12	1	0	
9	1		0
10	0		1
13	0	1	0
2			1
3		0	

2.割付確率と推定量

3種類の割付確率と推定量とはどのような関係を持つだろうか。HT推定量やHajek推定量で用いるべき割付確率はどれだろうか。

一定の仮定をおけば、どの割付確率を使っても、HT推定量が不偏である。以下に示す。

まず、割付可能対象者集合P, 調査参加順序oを所与とみなす。

- P, oのもとでのありうるすべての割付を通じた期待値を$E_a[\cdot|P,o]$と表記する。
- P, oを所与とした、割付可能刺激への割付確率は $\pi_i^{Po} = E_a[I_i|P,o]$と表記できる。

割付確率π_i^{Po}がすべてのiにおいて0より大きく、既知であるとしよう。 π_i^{Po}を使ったHT推定量は、 $\bar{y}^P$の不偏推定量である。[1]

- なぜなら、

$$E_a\left[\frac{1}{N}\sum_{i\in P} I_i \frac{y_i}{\pi_i^{Po}} \middle| P, o\right] = \frac{1}{N}\sum_{i\in P} E_a[I_i|P,o]\frac{y_i}{E_a[I_i|P,o]} = \frac{1}{N}\sum_{i\in P} y_i = \bar{y}^P$$

次に、割付可能対象者集合Pのみを所与とみなす。

- Pのもとでのありうるすべての調査参加順序を通じた期待値を$E_o[\cdot\,|P]$と表記する。
- Pを所与とした、割付可能刺激への割付確率は$\pi_i^P = E_o\left[\pi_i^{Po}\middle|P\right] = E_o[E_a[I_i\,|P,o]|\,P]$ と表記できる。

ありうるすべてのoのもとで、割付確率π_i^{Po}がすべて0より大きく、実現したoについて既知であるとしよう。π_i^{Po}を使ったHT推定量は、 $\bar{y}^P$の不偏推定量である。[2]

- なぜなら、

$$E_o\left[E_a\left[\frac{1}{N}\sum_{i\in P} I_i \frac{y_i}{\pi_i^{Po}}\,\middle|\, P,o\right]\middle|\, P\right] = E_o[\bar{y}^P|P] = \bar{y}^P$$

割付確率$\pi_i^P = E_o[\pi_i^{Po}|P]$がすべて0より大きく、既知であるとしよう。$\pi_i^P$を使ったHT推定量は、 $\bar{y}^P$の不偏推定量である。[3]

- なぜなら、

$$E_o\left[E_a\left[\frac{1}{N}\sum_{i\in P} I_i \frac{y_i}{\pi_i^{P}}\,\middle|\, P,o\right]\middle|\, P\right] = \frac{1}{N}\sum_{i\in P} E_o[E_a[I_i\,|P,o]\,|\,P]\frac{y_i}{\pi_i^P} = \frac{1}{N}\sum_{i\in P} E_o[\pi_i^{Po}|\,P]\frac{y_i}{E_o\left[\pi_i^{Po}\middle|P\right]} = \bar{y}^P$$

最後に、母集団における割付可能メンバー集合Uを所与とみなす。

- ありうるすべての調査対象者集合を通じた期待値を$E_P[\cdot]$と表記する。
  - 調査対象者の抽出は無作為であるから、$E_P[\bar{y}^P] = \bar{y}^U$である。
- Uを所与とした割付可能刺激への割付確率は$\pi_i^U = E_P\left[\pi_i^P \middle| i \in P\right] = E_P[E_o[E_a[I_i \,|P, o]|\, P]|i \in P]$ と表記できる。

ありうるすべてのP, oのもとで、割付確率π_i^{Po}がすべて0より大きく、実現したP, oについて既知であるとしよう。π_i^{Po}を使ったHT推定量は、$\bar{y}^U$の不偏推定量である。[4]

- なぜなら、

$$E_P\left[E_o\left[\, E_a\left[\frac{1}{N}\sum_{i \in P} I_i \frac{y_i}{\pi_i^{Po}} \,\middle|\, P, o\right] \middle|\, P\right]\right] = E_P[\bar{y}^P] = \bar{y}^U$$

ありうるすべてのPのもとで、割付確率π_i^Pがすべて0より大きく、実現したPについて既知であるとしよう。 π_i^Pを用いたHT推定量は$\bar{y}^U$の不偏推定量である。[5]

- なぜなら

$$E_P\left[E_o\left[\, E_a\left[\frac{1}{N}\sum_{i \in P} I_i \frac{y_i}{\pi_i^{P}} \,\middle|\, P, o\right] \middle|\, P\right]\right] = E_P[\bar{y}^P] = \bar{y}^U$$

割付確率π_i^Uがすべて0より大きく、既知であるとしよう。π_i^Uを使ったHT推定量は $\bar{y}^U$の不偏推定量である。[6]

- iをUのメンバーとして、iがPに含まれたときに1, そうでないときに0となる変数をJ_iとする。
- 無作為抽出でありNは固定されているので、$E_P[J_i] = N/T$ である。

$$
\begin{aligned}
E_P\left[E_o\left[E_a\left[\frac{1}{N}\sum_{i\in U} J_i I_i \frac{y_i}{\pi_i^U}\middle|\ P\right]\middle|\ P, o\right]\right] &= \frac{1}{N}\sum_{i\in U} E_P[J_i] E_P[\, E_o[E_a[I_i|P,o]|P]|i \in P]\frac{y_i}{\pi_i^U} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i\in U} E_P[J_i] E_P[\pi_i^P|i \in P]\frac{y_i}{E_P[\pi_i^P|i \in P]} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i\in U} \frac{N}{T} y_i \\
&= \bar{y}^U
\end{aligned}
$$

以上をまとめる。

		母集団における割付可能メンバー集合Uのもとでの割付確率π_i^U	実現した割付可能対象者集合Pのもとでの割付確率π_i^P	実現した割付可能対象者集合P・調査参加順序oのもとでの割付確率π_i^{Po}
		↓	↓	↓
実現した割付可能対象者集合Pにおける平均$\bar{y}^P$を推定したい	→		π_i^Pがすべてのiで0より大きければ、 **π_i^Pを使ったHT推定量は$\bar{y}^P$の不偏推定量である [3]**	π_i^{Po}がすべてのiで0より大きければ、 **π_i^{Po}を使ったHT推定量は$\bar{y}^P$の不偏推定量である [1]**
母集団における割付可能メンバー集合Uにおける平均$\bar{y}^U$を推定したい	→	π_i^Uがすべてのiで0より大きければ、 **π_i^Uを使ったHT推定量は$\bar{y}^U$の不偏推定量である [6]**	ありうるすべての割付可能対象者集合の下でπ_i^Pがすべてのiで0より大きいならば、 **π_i^Pを使ったHT推定量は$\bar{y}^U$の不偏推定量である [5]**	ありうるすべての割付可能対象者集合・調査参加順序の下でπ_i^{Po}がすべてのiで0より大きいならば、 **π_i^{Po}を使ったHT推定量は$\bar{y}^U$の不偏推定量である [4]**
注				多くの割付方法において、π_i^{Po}は0を含むことが多い。従ってこの方法は使えないことが多い

3. π_{ik}^{U}の推定方法

4章では、割付確率π_{ik}^{U}を推定するために、調査対象者集合からの復元無作為抽出を繰り返した。その理由を述べる。

次のような場面について考える。

- 母集団のある変数Xは未知の確率分布Fに従っている。私たちはそのなんらかの特性θに関心がある。そこで、母集団から無作為標本 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$を抽出し、そこから特性の推定値を得る方法(推定量) $\hat{\theta} = s(\boldsymbol{x})$ を考案した。
- $\hat{\theta}$ の確率分布はどうなるか。つまり、標本を抽出するたびに$\hat{\theta}$は確率的に変動するが、それはどのような分布に従っているのか。

このとき、次の方法 (**ブートストラップ推定**)によって、 $\hat{\theta}$の確率分布を推測することができる。

- 知りたい対象は、確率分布Fから$\boldsymbol{x}$を抽出して$\hat{\theta} = s(\boldsymbol{x})$を得たときの$\hat{\theta}$の確率分布である。
- たとえば$x_1 = 3$ならば、「Fからドローした値は確率$1/n$で3だ」という風に解釈できる。従って、$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$の経験分布は$F$の近似になっている。これを$\hat{F}$と呼ぼう。$n$が大きいほど、$\hat{F}$は$F$に近づく。
- $\boldsymbol{x}$ から要素を復元無作為抽出し、$\boldsymbol{x}^{*1} = (x_1^{*1}, x_2^{*1}, \ldots x_n^{*1})$とする。ここから推定量$\hat{\theta}^{*1} = s(\boldsymbol{x}^{*1})$を得る。これを$M$回繰り返し、 $\hat{\theta}^{*1}, \ldots, \hat{\theta}^{*M}$を得る。$M$は十分に大きな値とする。
- $\hat{\theta}^{*1}, \ldots, \hat{\theta}^{*M}$の分布は、$F$の近似である分布$\hat{F}$から$\boldsymbol{x}^{*}$を抽出して得た$\hat{\theta}^{*} = s(\boldsymbol{x}^{*})$の分布であり、$\hat{\theta}$の確率分布の近似と解釈できる。

私たちの問題について考えよう。

- 「母集団のメンバーi がもし標本に含まれたら割付可能刺激kに割り付けられるか」という変数について考える。それはなんらかの確率分布に従っている。私たちはその期待値π_{ik}^U に関心を持っている。
- そこで、母集団から調査対象者集合Pを抽出し、そこからπ_{ik}^Uの推定値を得る方法 $I_{ik}=s(P)$を考案した。すなわち、Pについて実際に割付を行い、(もしそこにiが含まれていたら) iがkに割り付けられたかどうかを観察するという方法である。残念ながら、I_{ik}の実現値は0か1のいずれかであり、π_{ik}^Uの推定量としては使い物にならないが、ひとつの推定量ではある。
- では、I_{ik}の確率分布はどうなるだろうか。

ブートストラップ推定によってI_{ik}の分布を推測する。

- Pから調査対象者を復元無作為抽出し、P^{*1}とする。 (もしそこにiが含まれていたら)ここから推定量I_{ik}^{*1}を得る。
- これをM回繰り返し、$I_{ik}^{*1},\dots,I_{ik}^{*M}$を得る。$M$は十分に大きな値とする。

$I_{ik}^{*1},\dots,I_{ik}^{*M}$の分布は$I_{ik}$の確率分布の近似である。従って、 $I_{ik}^{*1},\dots,I_{ik}^{*M}$の平均は、 I_{ik}の確率分布の期待値の推定量、すなわちπ_{ik}^Uの推定量になっている。

4. π_{ik}^{P}の推定方法

4章では、割付確率 π_{ik}^{P}を推定するために、調査対象者集合を**無作為に並び替えて**割付を繰り返した。

その理由は以下の通り。

- π_{ik}^{P} とは、調査対象者集合Pのメンバーiがある調査参加順序oのもとで割付可能刺激kに割り付けられる確率π_{ik}^{Po}を、ありうるすべての調査参加順序を通じて平均したものである。
- $\hat{\pi}_{ik}^{P}$は、ありうるすべての調査参加順序からM個の調査参加順序を復元無作為抽出することによって得た、 π_{ik}^{Po}の推定値の標本平均と捉えることができる。
- 従って$\hat{\pi}_{ik}^{P}$はπ_{ik}^{P}の推定量となっている。

5. $\hat{\pi}_{ik}^{U}$と$\hat{\pi}_{ik}^{P}$のどちらがよいか

このように、割付確率が未知である割付方法であっても、π_{ik}^{U}ないしπ_{ik}^{P}を事後的に推定することができる。また、それらの推定値を用い、Hajek推定量によって割付によるバイアスを取り除くことができる。

では、 $\hat{\pi}_{ik}^{U}$と$\hat{\pi}_{ik}^{P}$のどちらを使うのがよいか。これは容易に判断がつかない問題と思われる。

- $\hat{\pi}_{ik}^{U}$を支持する理由
    - π_{ik}^{U}はπ_{ik}^{P}より分散が小さいと思われる (下図)。割付確率の分散が大きいとき、Hajek推定量の分散も拡大する(2章)。
- $\hat{\pi}_{ik}^{P}$を支持する理由
    - $\hat{\pi}_{ik}^{U}$はブートストラップ推定に基づいており、調査対象者数が少ないときには推定誤差が大きいものと思われる。
    - いっぽう$\hat{\pi}_{ik}^{P}$は、調査対象者数が少ないほど正確になる。

A. 割付方法と母集団のもとでの割付確率

メンバーID	刺激1	刺激2	刺激3
1			0.929
2			0.929
3		0.724	
4		0.724	
5		0.724	0.218
6		0.724	0.218
7	0.499		
8	0.499		
9	0.499		0.410
10	0.499		0.410
11	0.499	0.255	
12	0.499	0.255	
13	0.499	0.255	0.191
14	0.499	0.255	0.191

B. 割付方法と調査対象者集合のもとでの割付確率

メンバーID	刺激1	刺激2	刺激3
2			0.916
3		0.789	
6		0.789	0.106
9	0.500		0.386
10	0.500		0.386
12	0.500	0.211	
13	0.500	0.211	0.184

Appendix D. 割付方法のもとでのバイアスの大きさの指標

本節では

6章では、割付方法の下で生じるバイアスの大きさを、調査を計画している段階で評価するための指標として、次の2つを提案した。

- スケーリングした割付確率と割付可能レシオの共分散 $Cov(\hat{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{r})$
- 割付確率の変動係数の推定値 $\widehat{CV}(\pi)$

本節では、この２つの指標を導出する。

1. スケーリングした割付確率と割付可能レシオの共分散 $Cov(\hat{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{r})$

割付によって生じるバイアスの大きさを、調査を計画している段階で直接的に評価することを考える。

割付可能対象者集合P_kにおける調査変数の値を$\boldsymbol{y_k} = (y_{1k}, \ldots, y_{N_k k})$、割付確率を$\boldsymbol{\pi_k} = (\pi_{1k}, \ldots, \pi_{N_k k})$、割付確率の平均を$\bar{\pi}_k = \frac{1}{N}\sum_{i \in P_k} \pi_{ik}$とする。

調査変数において生じるバイアスは、平均1にスケーリングした割付確率を$q_{ik} = \pi_{ik}/\bar{\pi}_k$として

$$Bias\left(\hat{\bar{y}}_{simple,k}, \bar{y}_k\right) = Corr(\boldsymbol{\pi_k}, \boldsymbol{y}_k) \times \frac{SD(\boldsymbol{\pi_k})}{\bar{\pi}_k} \times SD(\boldsymbol{y_k}) = Cov(\boldsymbol{q}_k, \boldsymbol{y_k})$$

と表現できる。

バイアスは調査変数$\boldsymbol{y_k}$に依存する。従ってバイアスの評価のためにはなんらかのひとつの調査変数を想定しなければならない。しかし、

- 調査を計画している段階で、母集団における割付可能性の分布について仮定することは比較的に容易だが、調査変数の分布について仮定することは困難である。
- さらに、私たちは多くの調査において複数の調査変数に関心を持っており、ひとつに絞り込むのは容易でない。

そこで、仮想的母集団データから簡単に手に入り、しかも割付に伴うバイアスが大きくなりそうな変数 (すなわち、割付確率と相関が高くなりそうな変数)を用意し、その変数を調査変数としたときのバイアスに注目する。

そうした変数として、「全刺激数に占める割付可能刺激数の割合」に注目する。これを**割付可能レシオ** r_i と呼ぶ。

- 割付可能レシオは、その対象者の他の刺激への割付可能性の高さを表している。従って、割付がその対象者の他の刺激への割付可能性に依存しているとき、割付可能レシオは割付確率と強い負の相関を持つと想定される。

割付可能対象者集合P_kについて、割付確率π_{ik}の推定値$\hat{\pi}_{ik}$を平均1にスケーリングした$\hat{q}_{ik} = \hat{\pi}_{ik} / \left(\frac{1}{N_k}\sum_{i \in P_k} \hat{\pi}_{ik}\right)$を求める。そのベクトルを$\hat{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{k}} = (\hat{q}_{1k}, \dots, \hat{q}_{Nk})$とする。割付可能レシオのベクトルを$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{k}} = (r_1, \dots, r_{N_k})$、平均を$\bar{r}_k = \frac{1}{N_k}\sum_{i \in P_k} r_i$とする。

$$Cov(\hat{\boldsymbol{q}}_k, \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{k}}) = \frac{1}{N_k}\sum_{i \in P_k} (\hat{q}_{ik} - 1)(r_i - \bar{r}_k)$$

を求め、これをバイアスの指標とする。

この指標は、関心の対象が刺激kの割付可能対象者における割付可能レシオr_iの平均$\bar{r}_k$であるとき、割付対象者S_kにおける割付可能レシオの標本平均$\hat{r}_k = \frac{1}{n_k}\sum_{i \in S_k} r_i$が持つバイアスの推定値だと捉えることができる。

2. 割付確率の変動係数の推定値 $\widehat{CV}(\boldsymbol{\pi})$

割付によって生じるバイアス

$$Bias\left(\hat{\bar{y}}_{simple,k}, \bar{y}_k\right) = Corr(\boldsymbol{\pi_k}, \boldsymbol{y}_k) \times \frac{SD(\boldsymbol{\pi_k})}{\bar{\pi}_k} \times SD(\boldsymbol{y_k})$$

のうち、調査変数に依存しない項である$\frac{SD(\boldsymbol{\pi_k})}{\bar{\pi}_k} = CV(\boldsymbol{\pi})$を評価することを考える。

- これは次のように言い換えることができる。割付によって生じるバイアスはHajek推定量によって(ほぼ)取り除くことができるが、割付確率の分散が大きいときには、Hajek推定量の分散が大きくなってしまう。そこで、バイアスの大きさを割付確率の分散の観点から評価することを考える。

その指標として、割付可能対象者集合P_kにおける割付確率π_{ik}の変動係数

$$CV(\boldsymbol{\pi_k}) = \frac{1}{\bar{\pi}_k}\sqrt{\frac{1}{N_k}\sum_{i \in P_k}(\pi_{ik} - \bar{\pi}_k)^2}$$

に注目する。

いっぽう、割付確率π_{ik}が未知であり４章で提案した方法で推定した場合、推定値$\hat{\pi}_{ik}$は推定誤差を含んでおり分散を持つ。従って、

$$CV(\boldsymbol{\hat{\pi}_k}) = \frac{1}{\bar{\hat{\pi}}_k}\sqrt{\frac{1}{N_k}\sum_{i \in P_k}(\hat{\pi}_{ik} - \bar{\hat{\pi}}_k)^2}$$

は$CV(\boldsymbol{\pi_k})$の不偏推定量ではなく、大きめに偏る。

$\hat{\pi}_{ik}$の分散を減らすためには再割付試行数を増やす必要があり、計算時間が増大する。調査の計画段階では複数の割付方法について検討するため、ひとつの割付方法についての計算時間をできるだけ減らしたい。そこで、 $CV(\boldsymbol{\hat{\pi}_k})$から $\hat{\pi}_{ik}$の分散を差し引く方法について検討する。

割付確率π_{ik}の推定量$\hat{\pi}_{ik}$が不偏に近く、かつ割付対象者数n_kがある程度大きければ、$\bar{\hat{\pi}}_k$は$\bar{\pi}_k$に近いと考えられるので、

$$\begin{aligned}\left(CV(\hat{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{k}})\right)^2 &= \frac{1}{\bar{\hat{\pi}}_k^2} \times \frac{1}{N_k} \sum_{i \in P_k} \left(\hat{\pi}_{ik} - \bar{\hat{\pi}}_k\right)^2 \\ &\approx \frac{1}{\bar{\pi}_k^2} \times \frac{1}{N_k} \sum_{i \in P_k} (\hat{\pi}_{ik} - \bar{\pi}_k)^2 \\ &= \frac{1}{\bar{\pi}_k^2} \times \frac{1}{N_k} \sum_{i \in P_k} \left((\hat{\pi}_{ik} - \pi_{ik}) + (\pi_{ik} - \bar{\pi}_{ik})\right)^2\end{aligned}$$

と近似できる。推定誤差$\hat{\pi}_{ik} - \pi_{ik}$が$\pi_{ik}$と独立だと仮定すれば

$$\left(CV(\hat{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{k}})\right)^2 \approx \frac{1}{\bar{\pi}_k^2} \times \frac{1}{N_k}\left(\sum_{i \in P_k} (\hat{\pi}_{ik} - \pi_{ik})^2 + \sum_{i \in P_k} (\pi_{ik} - \bar{\pi}_{ik})^2\right) = \frac{1}{\bar{\pi}_k^2 N_k} \sum_{i \in P_k} (\hat{\pi}_{ik} - \pi_{ik})^2 + \left(CV(\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{k}})\right)^2$$

よって、 $CV(\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{k}})$の推定量を以下とする。$\hat{\pi}_{ik}$を得る際に得た$V_{ik} = E[(\hat{\pi}_{ik} - \pi_{ik})^2]$の推定値$\hat{V}_{ik}$を利用して、

$$\widehat{CV}(\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{k}}) = \sqrt{\left(CV(\hat{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{k}})\right)^2 - \frac{1}{\bar{\pi}_k^2 N_k} \sum_{i \in P_k} \hat{V}_{ik}}$$

引用文献

Fattorini (2006) An adaptive algorithm for estimating inclusion probabilities and performing the Horvitz-Thompson criterion in complex designs. *Computational Statistics*, 24, 623-639.

Sarndal, C.E., Swensson, B., Wretman, J. (1992) *Model Assisted Survey Sampling*. Springer.

Saber, G.A.F., & Salehi, M.M. (2013) *Adaptive Sampling Designs*. Springer.

Thompson, M.E. & Wu, C. (2008) Simulation-based randomized systematic PPS sampling under substitution of units. *Survey Methodology*, 34(1), 3-10.

Tille, Y. (2016) Unequal probability inverse sampling. *Survey Methodology*, 42(2), 283-295.

土屋隆裕 (2009) 概説標本調査法. 朝倉書店.

永田靖 (2005) 統計学のための数学入門30講. 朝倉書店.